CLAUDIJ MYDORGIJ PATRICIJ PARISINI PRODROMI...

Claude Mydorge

Digitized by Google

13
11 F
26

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

54.
9
32

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

CLAVDII MYDORGII

PATRICII PARISINI

PRODROMI

CATOPTRICORVM ET DIOPTRICORVM:

SIVE

CONICORVM

OPERIS AD ABDITA RADII REFLEXI ET REFRACTI myſteria præuij & facem præferentis.

LIBRI PRIMVS ET SECVNDVS.

D. A. L. G.

Bib. Sec. Coll. Rom. Soc. J.

PARISIIS,
Ex Typographia I. DEDIN, via Nucum, ſub ſigno trium Columbarum.

M. DC. XXXI.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

BIBLIOTECA ... ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

NOBILISSIMO
ET GENEROSISSIMO VIRO
D. CAROLO DE CAVENDYSSHE
Equiti Anglo

CL. MYDORGIVS PATRICIVS PARISINVS ſalutem & felicitatem.

VETVS eſt, & vulgatum illud τὰ καλὰ χαλεπὰ, Nobiliſſime vir, ſed veriſſimum ſæpe nimiùm Mathematicæ ſcientię comprobant, quę dum ad præclara & vulgo pene ſtupenda vocant & alliciunt, ac ſui, hoc eſt veritatis, deſiderio incendunt, interim ſublimes nimis, atque inſuper veluti ſcopulis circumſeptæ, raró facilem ad ſe præbent aditum: nec niſi generoſis & conſtantibus animis fauent, puſillos & degeneres peroſæ. Adeo paucis abſque labore ad ipſas aſcendiſſe conceſſum eſt: quanquam multi ipſarum etiam faſtigium ſunt aſſecuti: cuiuſmodi præterita tamen olim ſæcula plures tulere quàm poſtrema. Hinc enim prodiere varia illa, quotquot nunc extant, erudita veterum præſertim Geometrarum monumenta, quibus,dum frequentiùs perluſtrantur, ad Mathematicarum etiam adyta quantumuis ardua aut abſtruſa facilis tandem comparatur acceſſus, & viæ labor omnis faceſſit. Ea autem cum ſit Conicorum tractatio, vt non aliam inter geometricas ſpeculationes ſublimiorem, quanquam nec vtiliorem, Matheſis agnouerit; mirum quam paucos hactenus ſit nacta cultores qui obſtinato & pertinaci animo ad intimos eius receſſus penetrarint. Quinimo, ſi non omnino à tot retro ſęculis euanuit, certè maximè obſcurata iacuit eius memoria, nec niſi in vnius Apolloniani libri ſuperſtite dimidio monu-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

mento ſeruata ad nos peruenit. Hinc inuiſi nobis qui ex eius cultura certò prodituri erant fructus innumeri, non ſine magno totius Matheſeos & ſui ſtudioſorum damno. Hæc igitur olim mecum reputans, certus etiam ſuperſtites Apollonij Conicorum libros non facilè vnicuique obuios, & nomine tenus pleriſque tantùm notos, à multis etiamnum deſiderari: non potui tunc de diutina nimis ſuperſtitum ſiti non dolere, & de amiſſorum publico luctu non ingemiſcere: in eámque demum curam incubui aliquandiu, vt quà poſſet fieri, ſtudioſorum deſiderio ſubuenirem, & damna publica aliquatenus reparare tentarem: aut ſaltem ad ſimilis conatus palmam & laudem aliorum animos excitarem. Quoniam autem ardua iſta & maximè ſublimis ſpeculatio magni illius geometræ ingenio & calamo digna, quantum ſui ſtudioſos ad ſe allectat & inuitat, tantumdem neſcio quà imaginaria potiùs & affic̄ta, quam inſita difficultate pleroſque arcet aut remoratur: paucoſque adhuc inſoliti coni ſectionum nominis quaſi ſtupor non inuaſit: quinetiam & qui generoſo conatu viam ingreſſi laborem labore ſuperantes, tandem ad præfinitam temporum inuidia metam, quarti ſcilicet Apolloniani libri finem, perueniunt, hoc vnum ſibi plerique operæpretium conſtituunt & æſtimant, vt de cognitis elementis conicis gaudentes ad ſolidorum problematum determinationes & compoſitiones fiant audaciores: vixque vnus aut alter vlteriùs prouectus intimam coni ſectionum naturam introſpexit, nedum illas in ipſa rerum natura ſcrutatus eſt aut agnouit: hæc ideo præcipua tunc mihi cura fuit, vt, inſtituta de ijſdem ſpeculatione, qua fieri poſſet ſimplicitate & breuitate naturalem coni ſectionum ortum, & propriam vniuſcuiuſque naturam primùm exponerem: deinde & ipſas nonnihil quàm antea magis excultas, ac veluti cicuratas, ad proprios vſus faciles & compendioſas redderem: tandemque & ipſarum, in Catoptricis præſertim & Dioptricis, myſteria ſi non omnia ſaltem præcipua aliquot detegerem & publicarem. Verùm quæ mihi exinde ſuper hiſce raptim meditari, & breuiter annotaſſe contigit, neſcio quo fato poſtremam manum non ſortita, dum etiam nouis interim curis & ſtudijs occupatur animus, ſatis diu latuerunt: donec illa vnus tu è

tenebris eruta in lucem vindicaſti; cùm me, vt ad maturius examen ipſa reuocarem, tam amanter compuliſti. Poſtquàm enim familiaritatis tuę honore affectum etiam & beneuolentiæ ac humanitatis teſtimonijs me tibi voluiſti obligatum: illorúmque te ſtudioſum maximè & cupidum ſubinde ſignificaſti: haud potui deſiderio tuo non morem gerere. Quanquam, certè, poteram exiſtimationi meæ, & conceptæ de me apud te opinionis famæ tutiùs conſultum ire, ſi ea iſtiuſmodi à me excogitata non publicaſſem, & priuatis tantùm vſibus aſſeruaſſem, quæ publicata, ac demum typis mandata, lynceorum, hoc eſt tuis, & tuæ eruditionis virorum oculis offenſionem fortè ſint paritura. Malui tamen propriæ exiſtimationis periculum inire, quàm obſequij in te mei teſtificationem hanc quantulamcunque mihimet inuidere. Quin, ratus hoc ſaltem nomine tibi fore grata & accepta, illa auctiora nonnihil, &, qua potui cura, breuitati interim ſtudens, effeci cultiora. Quoniam autem ad mei Catoptricorum & Dioptricorum Prodromi apparatum ſunt deſtinata ac diſpoſita; en jam jam ipſe viam initurus, & ad primam curſus ſui metam accinctus tibi ſe ſiſtit, ſuſcepti itineris, & optatæ ex mea huiuſce agri cultura meſſis primitias offerens: quæ ſi vni tibi probentur, quem familiaris alloquij & conſuetudinis receptus honor rerum Mathematicarum mihi comprobauit peritiſſimum, non aliorum judicia refugient, aut ab inuidorum calumnijs ſibi timebunt. Quas igitur ingenij indices expetijſti, eaſdem & obſeruantiæ in me tuæ teſtes jam habe, & foue: vnáque & auctorem ipſum me porro amare perge. Vale.

Lutetiæ Pariſiorum. Calend. Decembris M. DC. XXXI.

Digitized by Google

AD CONICORVM OPVS.

MONITVM.

VT nobis à limine ſalutandus viſus es, Amice Lector, ita & illicò monendus ſuſceptum à nobis Conicorum opus Euclideis duntaxat elementis geometricis, non etiam Apollonianis Conicorum libris ſuperſtructum tibi exhibitum iri. Quanquam & neuter vllibi vt auctor deſignatus aut inuocatus occurret. Norma operi vna erit geometrica ratio Euclideis elementis contenta, cui ſi quis vel tantillùm aſſueuerit nullum inibi ſentiet obicem, & inoffenſo pede totum facile percurret ædificium. At certè ab Apollonianis non pendet elementis conicis, nam & propria habet elementa quæ primo totius operis libro materiam ſuppeditauerunt. Atque ipſa quidem non aliunde mutuata & accepta quam ab ipſa rei propoſitæ penitius introſpectæ natura: eiuſmodi etiam vt elementis Apollonianis longè videri debeant ſimpliciora: quandoquidem & fontes continent vnde ipſe Apollonius occulto artificio præcipuos & capitales deduxit riuulos. Hinc omnia à nobis in eodem primo & principali libro directè ſunt demonſtrata, quæ ab ipſo Apollonio plerumque indirectè, & ab abſurdi conſequentia ſunt probata. Quoniam autem & inſtitutum noſtrum longè ab Apollonij ſcopo diuerſum eſt, ſiquidem ille Conica ſua purè & abſtractè vbique propoſita ad ſolidorum problematum determinationes & compoſitiones duntaxat diſpoſuit: nos Conica in phyſicis præcipuè conſectamur, & ad phyſica componimus, vt ad communes vſus ipſa tandem accommodemus: ad ſolida interim problemata etiamnum ſatis factura procurantes: eapropter, quod Apollonius quatuor prioribus libris elementorum nomine diſperſit, hoc ipſum maximam partem, ſed tamen abunde ſatis, vnico primo noſtro ſumus complexi. Qui autem ſequentur libri hac

ã

Digitized by Google

ſerie ſeſe tibi offerent. Secundus de multimoda geometrica conicarum linearum in plano per puncta deſcriptione agit: vt cognita ſingularum propria natura, earumdem inſuper nota deſcriptio ipſas ad proprios vſus faciliùs cogat. Atque etiam hic ſecundus liber ſuam tandem, in calce ſcilicet totius operis, obtinebit appendicem pro reliquis deſcribendarum conicarum linearum methodis mechanicis & organicis. Tertius & Quartus de eiuſdem nominis coni ſectionum inuicem comparatione erunt. Et prior quidem quæ eædem ſint inuicem coni ſectiones accuratè ſiue in coni ſuperficie ſiue in plano diſquiret. Poſterior autem de ſimilibus coni ſectionibus aget. Quintùs, ad phyſica magis accedens, de coni ſectionum portionibus, & de coni portionum ſectionibus notatu digna proponet. Sextus autem, ad experimenta phyſica vtilis, data continebit conica, ſiue problemata coni ſectiones determinantia. Septimus de adſcriptis & inſcriptis conicis, ſiue de maximis & minimis ad ſpecularia & diopticem ſpectantibus aget. Octauus denique conicas lineas, & conoideas ſuperficies è propria & ſpeciali cuiuſque natura, & habitudine ad radium ſiue in opaco, ſiue in diaphano, comparabit inuicem: tandemq; præcipua circa vtrumq; & reflexum & refractum radium myſteria aperiet non vulgo cognita, quorum noua luce deinceps, non, vt hactenus, titubanter & tentando, ſed recta & propria via, atq; conſtanti opere, ad cuiuſcunq; propoſiti ſpeculi, aut optatæ lentis diaphanæ fabricam accingi promptum & indubitatum erit. Sed & ſerijs eiuſmodi ludicrum aliquid conſequenter etiam adnectere nobis pro ſubiecti conuenientia non incommodum viſum eſt: tibi forte non erit injucundum. Complectetur autem illud Ænigmatis non ita pridem à nobis commenti & vulgati hiſtoriam, & enodationem, illam paucis cognitam, hanc à multis vario, ſed vano, conatu tentatam.

Noſtris autem octo Conicorum libris neceſſarias definitiones quaſdam præmiſimus, reliquas debitis locis interſeruimus, omnes quidem nudas, & abſque vlla paraphraſi aut appoſita figura. Idque conſultò: quoniam primò definitiones ipſæ ſatis planæ ſunt & faciles: deinde quoniam, & ſi quibuſdam nonnihil difficiles videri debent, rectè & commodè ab ipſis factum iri monemus ſi non diutius in ipſis immorentur, ſed ad ipſas propoſitiones continuata ſerie recenſendas protinùs ſe conuertant. Fiet enim tùm demùm vt, ex propoſiti expoſitione & demonſ-

Digitized by Google

tratione vna cum adjuncta figura, definitum ipſum ſuo occurrens loco lucem definitioni eatenus ſubobſcuræ afferat. Teſtamur certè probè & fœliciter nobis ceſsiſſe olim hanc quam inculcamus rationem & methodum tandem initam alijs ſæpe fruſtra, aut ſaltem parum fructuosè, tentatis. Fieri enim vix aliter potuerat, vt qui in mathematicis fuimus αὐτομαθεῖς ſæpe ſæpius in ipſis à compendioſa & recta via primo ingreſſu non aberraremus. Dum tamen ſuſtinuimus aliquantùm, & patienter egimus, atque iterare plerumq; rurſuſq; pergere non deſtitimus, tandem aliquando & optata ſe nobis via obtulit, & per ipſam facilis in agrum mathematicum ingreſſus, è quo ſpicis primùm lectis, deinde & ſemente ex ijſdem parata & projecta, poſtremùm ampliores manipulos collegiſſe contigit. Quam autem è propria catoptrici & dioptrici agri cultura circa Conica meſſem fecimus, hanc tibi lubenter interim communicare decreuimus, dum integra Catoptricorum & Dioptricorum meſsis matura fiet. Oblatis itaque fruère, & ſi quam à te mereri valebunt laudem & gratiam, Reuerendis Patribus Societatis Ieſu, maximè vero illuſtri & generoſo viro D. de Cauendiſche Comiti Anglo totius Matheſeos ſummè perito, nobiſq; amiciſsimo vtramque referes. Siquidem hortatores nobis fuerunt illi & hic auctor vt Conica hæc intermiſſa olim & quaſi neglecta reſumeremus & abſolueremus; atque publici ideoque & tui juris faceremus.

Quoniam autem longas nectunt moras operæ, & longiores etiamnum protrahit incidendarum figurarum numeroſa ſupellex: atque inſuper vix dum ab operis ordinandi & promouendi ſolicitudine reſpiramus: à typis aliquantum quieſcere tum primùm nobis viſum eſt, & ampliorem interim apparatum operiri, quo tandem inſtructi continuò ad reliqua tibi procuranda accingemur. Ne tamen inde ſit cur nobis hoc otij, quanquam negotioſi, inuideas: maluimus tibi binos priores ſuſcepti operis libros iam expletos non inuidere: quibus cunctantius aliquanto perlectis & penſitatis, de reliquis maturius iudicium feras, aut votum concipias. Vix enim, fatemur liberè, tui fient iuris, niſi illos optaueris. Namque leuius ducimus noſtra, quanquam malè concepta, nobis priuatim placere & inſeruire, quam, ſi aptè diſpoſita atque etiam profutura iam negligas, aut aliter placitura non ſint, ea tibi procurare.

Hoc autem inſuper, quanquam maximè diſplicet, monemus,

Digitized by Google

vt priùs quam ad horum quæ tibi nunc offèrimus, ideoque & tuæ ſubjicimus cenſuræ, examen accedas, menda in ea illapſa reſtituas & emendes, quæ alioqui moras tibi afferent, & ſcopulos objicient non facilè ſuperandos. Horum autem ſeriem, àh nimis longam & numeroſam! poſt ſe trahit & tibi exhibet ſecundi libri finis quò te jam jam amandamus.

Digitized by Google

CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER PRIMVS.

De Elementis Conicis, ſiue de Coni ſectionum ortu & generatione ac propria cujuſque natura.

DEFINITIONES.

I.

SVPERFICIES Conica dicitur, ea quam ducta à manente ſublimi puncto per circuli circumferentiam in eodem non exiſtentem plano recta linea interminata, & circa eandem circumferentiam circumducta donec ad idem ejuſdem punctum redeat à quo cœpit moueri, deſcribit.

I I.

Vertex ſuperficiei conicæ dicitur, manens punctum à quo educta recta linea ſuperficiem conicam deſcripſit.

I I I.

Axis ſuperficiei conicæ dicitur, recta linea à vertice conicæ ſuperficiei ad centrum circuli, circa cujus circumferentiam circumducta recta linea eandem ſuperficiem deſcripſit, perducta.

Digitized by Google

IIII.

Conicæ ſuperficies oppoſitæ, ſiue ad verticem exiſtentes, dicuntur, quas ſimul eadem recta linea vltra verticem producta, & circa eandem circuli circumferentiam circumducta deſcribit. Ideoque & communem verticem, & axes in directum habent.

V.

Conus autem dicitur, ſolida figura contenta circulo, & conica ſuperficie à vertice ad ejuſdem circuli circumferentiam intercepta.

VI.

Vertex coni idem eſt qui & ſuperficiei conicæ ipſum conum continentis.

VII.

Baſis coni dicitur, circulus ad cujus circumferentiam educta, & circumducta recta linea ſuperficiem conicam deſcripſit.

VIII.

Axis coni dicitur idem qui ſuperficiei conicæ conum continentis. Recta nempè à vertice coni ad centrum circuli, qui ejuſdem eſt baſis, perducta.

IX.

Oppoſiti coni, ſiue ad verticem exiſtentes, dicuntur, qui oppoſitis ſuperficiebus conicis continentur. Ideoque & verticem communem, & axes in directum habent.

X.

Conus rectus dicitur, cujus axis ad rectos ipſius baſi angulos inſiſtit.

XI.

Conus ſcalenus dicitur, cujus axis non ad rectos ipſius baſi angulos inſiſtit.

XII.

Coni ſectionem cum Apollonio intelligimus, lineam in coni ſuperficie, quæ eſt communis plani cujuſpiam conum diuidentis & ejuſdem ſuperficiei ſectio interminata, aut vbique ſibi ipſi continua. Ideoque & in eodem etiam plano exiſtit.

XIII.

Conicam lineam intelligimus, cujuſcunque coni ſectionis portionem.

Digitized by Google

XIIII.

Rectas lineas in ſectione, aut portione, ductas dicimus, quæ vtrinque in ipſa ſectione, aut portione, terminantur.

XV.

Diametrum cujuſcunque coni ſectionis, aut portionis, dicimus, quamcunque rectam lineam intra ſectionem ductam, quæ binas quaſcunque rectas lineas in ipſa ſectione, aut portione, ductas inuicem æquidiſtantes bifariam diuidit. Quæ & intercepta diameter etiam dicetur.

XVI.

Ordinatam autem ad diametrum, ſiue ordinatim applicatam intelligimus, vnamquamque linearum in coni ſectione, aut portione, ductarum ab eadem diametro bifariam ſectarum, aut cuipiam bifariam ſectæ æquidiſtantium.

XVII.

Axem cujuſcunque coni ſectionis, aut portionis, dicimus, diametrum quæ ordinatim ad ipſam applicatas bifariam, & ad angulos rectos, diuidit. Qui & intra ſectionem interceptus axis etiam dicetur.

XVIII.

Verticem Coni ſectionis, aut portionis, dicimus, terminum cujuſcunque diametri qui in ipſa eſt ſectione, aut portione. Diceturque in axe vertex ſupremus.

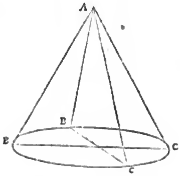
XIX.

Parametrum coni ſectionis dicimus, rectam lineam à cujuſlibet coni ſectionis, aut portionis, vertice eductam ordinatim ad contiguam diametrum applicatis æquidiſtantem: cui comparantur, & ſecundum quam æſtimantur, & poſſunt omnes quæcunque à coni ſectione, aut portione, ad eandem diametrum ordinatim applicantur. Quæ & recta iuxta quam poſſunt ad diametrum à coni ſectione, aut portione, ordinatim ductæ dicetur. Quæ, ſi ab axis termino ſit educta, recta parameter: ſin autem, parameter ſimpliciter dicetur.

Digitized by Google

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI Conus plano per verticem ſecetur; ſectio erit triangulum.



Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per verticem A ſecetur, & ſit facta in ſuperficie & baſe coni ſectio B A C: Dico B A C eſſe triangulum.

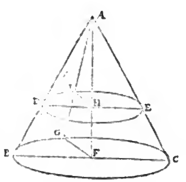
Quoniam enim A vertex eſt coni, & manens punctum à quo ad circuli B C circumferentiam perducta & circumducta recta linea ipſam A B C coni ſuperficiem deſcribit, eſtque punctum B in ejuſdem circuli circumferentia: erit A B recta linea eadem ei quæ ſuperficiem conicam deſcribit. Eademque ratione & A C recta oſtendetur linea: eſt autem & B C recta linea, communis ſcilicet duorum planorum ſectio: Triangulum igitur eſt B A C ſectio. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hinc patet, Si conus plano per axem ſecetur, ſectionem eſſe triangulum. Quandoquidem axis coni per eiuſdem verticem tranſit.

THEOR. II. PROP. II.

Si conus plano ſecetur æquidiſtante baſi; erit facta in ſuperficie coni ſectio circuli circumferentia.



Sit Conus A B C, cuius vertex A, baſis B C circulus, qui plano ſecetur æquidiſtante baſi quod faciat in ſuperficie ſectionem D I E: Dico D I E eſſe circuli circumferentiam.

Sit enim F centrum circuli qui baſis eſt coni: erit ducta A F axis eiuſdem. Secetur itaque A B C conus plano per axem A F quod ſectionem faciat triangulum B A C: communiſque eiuſdem per axem plani & plani per D I E ſectio ſit recta D E axem A F ſecans in H: Quoniam & planum per D I E baſi coni æquidiſtat, erit & D E

& D E recta rectæ B C æquidiſtans: quare vt AF ad F B, ita erit AH ad HD: & vt A F ad F C, ita erit A H ad H E: Igitur, ex æquali, vt F C ad F B, ita erit H E ad H D. Eſtque F B æqualis F C: quare & D H æqualis erit H E. Sumpto autem in BC circuli circumferentia puncto quolibet G, ducatur A G quæ erit in ſuperficie coni, ideoque & DIE ſectioni occurret; occurrat igitur in I, iunganturque IH, GF. Quoniam igitur planum per D I E plano per B G C æquidiſtat; erunt amborum communes cum plano per A F G ſectiones, ſcilicet H I, GF, æquidiſtantes inuicem. Quare vt A F ad F G, ita erit A H ad HI. Sed vt A F ad F B, ita etiam eſt A H ad H D: igitur, ex æquali, vt F G ad F B, ita erit H I ad H D. Eſtque punctum G in circuli circumferentia, ideoque & F G æqualis F B, quoniam & F centrum eſt: quare & H I erit æqualis H D. Sunt igitur æquales H I, H D, H E. Similiterque & ad quodcumque aliud ſumptum in ſectione D I E punctum recta ab H ducta ipſis H D, H F æqualis oſtendetur. Circuli igitur circumferentia erit D I E ſectio, eiuſque centrum H. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Hinc, & ex definitionibus, patet Figuram circulo, cuius circumferentia eſt D IE, & ſuperficie conica ad verticem A contentam, conum eſſe.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I.

Subcontrariam poſitionem dicimus, quando bina triangula ſimilia ad communem verticalem angulum poſita baſes habent non parallelas. Ideoque & ipſa triangula dicentur ſubcontrariè poſita. Atque etiam baſes ſubcontrariè inuicem poſitæ.

I I.

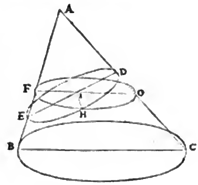
Subcontrariam coni ſectionem dicimus, ſiue conus ſecetur duobus planis ad idem per axem triangulum rectis, & ab ipſo ad verticem abſcindentibus bina triangula ſimilia, ſed ſubcontrariè poſita. Siue conus per axem iam ſectus plano ad baſim recto, rurſus ſecetur plano ad triangulum per axem recto, & ab ipſo ad verticem abſcindente triangulum ſimile, ſed ſubcontrariè poſitum.

Digitized by Google

THEOR. III. PROP. III.

Si conus ſcalenus plano ſecetur ſubcontrariè baſi; erit facta in ſuperficie coni ſectio circuli circumferentia.

Sit conus ABC ſcalenus, cuius vertex A, baſis B C circulus, plano per axem ad rectos baſi BC angulos ſectus faciente triangulum B A C: qui rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, quod ab ipſo abſcindat ad verticem triangulum D A E ſimile, ſed ſubcontrariè poſitum: & faciat in coni ſuperficie ſectionem D H E: Dico D H E eſſe circuli circumferentiam.



Sit enim communis plani per D H E, & trianguli BAC ſectio recta DE: & ſumpto in ipſa puncto I quocumque, ducatur per I ipſi B C æquidiſtans recta FIG, per quam planum agatur conum ABC ſecans, eiuſque baſi æquidiſtans, quod communem cum ſuperficie ſectionem faciat curuam lineam F H G, & cum plano per D H E rectam I H: erit igitur ex anteced. F H G ſectio circuli circumferentia eiuſque diameter F G: & quoniam vtrumque per D H E & F H G planum ad triangulum B A C rectum eſt; erit communis amborum ſectio recta I H ad idem B A C triangulum, ideoque & ad vtramque D F, F G rectam perpendicularis. Propter ſimilitudinem autem triangulorum DAE & BAC, hoc eſt FAG, erit angulus ad G angulo ad E æqualis. Suntque verticales ad I etiam æquales: quare & reliquus ad F angulus reliquo ad D æqualis erit: ideoque & triangulum D I G triangulo FIE ſimile. Itaque vt D I ad I G, ita erit F I ad I E. Rectangulum igitur D I E rectangulo F I G æquale erit. Sed quoniam diameter eſt F G, & perpendicularis H I, punctumque H in circuli circumferentia; rectangulo FIG æquale erit quadratum H I: quare & rectangulo D I E etiam æquale erit idem H I quadratum. Punctum igitur H in circuli circumferentia erit, cuius ſit diameter D E. Similiter autem & perpendicularis H I ad ſectionem D H E productæ pars eadem ſectione & puncto I intercepta oſtendetur poſſe idem D I E ſub D E diametri partibus rectangulum: ſectio igitur D H E circuli erit circumferentia: eiuſque diameter recta D E. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Atque hinc etiam, & ex definit. patet Figuram circulo, cuius ſit circumferentia D H E, & ſuperficie conica ad verticem A contentam, etiam conum eſſe.

Digitized by Google

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

Parabolam dicimus, quamcumque coni ſectionem, cuius diameter alterutri crurum trianguli per axem ſecti coni æquidiſtat.

II.

Hyperbolam dicimus, quamcunque coni ſectionem, cuius diameter producta alterutri crurum trianguli per axem ſecti coni vltra verticem occurrit.

III.

Ellipſim dicimus, quamcunque coni ſectionem, cuius diameter vtrique crurum trianguli per axem ſecti coni infra verticem occurrit, eiuſdem baſi neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita.

IIII.

Oppoſitas ſectiones dicimus, binas hyperbolas in oppoſitis ſuperficiebus ab vno eodemque plano non per verticem ſectis factas.

V.

Tranſuerſam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in hyperbola interceptæ cuilibet diametro in directum eſt poſita, vel in ellipſi ipſa eſt intercepta diameter continuata, & vtrobique vtroque trianguli per axem ſecti coni crure intercipitur. Quæ & in oppoſitis ſectionibus, vel ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, cum ſit diameter, vtrinque etiam à ſectione terminatur. Quæ ſi intercepto axi ſit in directum, aut ſit ipſe axis continuatus, tranſuerſus etiam axis dicetur.

VI.

Centrum coni ſectionis dicimus, punctum in quod diametri omnes concurrunt. Quodque tranſuerſam quamcunque diametrum bifariam diuidit.

VII.

Figuras hyperbolarum, vel ellipſium, veluti & circuli circumferentiarum, dicimus, parallelogramma ſub earumdem ſectionum tranſuerſis diametris, & contiguis parametris contenta. Quarum illæ tranſuerſa dicentur latera, hæ coefficientia.

Digitized by Google

VIII.

Secundam diametrum dicimus, rectam lineam quæ in ellipſi, vel in oppoſitis ſectionibus, veluti & in circuli circumferentia, ordinatim ad aliquam diametrum applicatis æquidiſtans per centrum ducta, & ab ipſo bifariam ſecta, media proportionalis eſt inter latera figuræ ad eandem diametrum factæ.

IX.

Coniugatas diametros dicimus, binas rectas lineas in ellipſi, vel in oppoſitis ſectionibus, veluti & in circuli circumferentia, per centrum ductas, quarum vtraque diameter eſt, & rectas lineas alteri æquidiſtantes vtrinque ſectione terminatas bifariam diuidit. Quare ſi etiam ad angulos rectos; coniugati axes dicentur: & in ellipſi, etiam extremæ diametri.

X.

Principalem coni ſectionis diametrum, ſiue diametrum ex generatione, aut ex coni ſectione, dicimus, rectam lineam quæ plani trianguli per axem ſecti cuiuſlibet coni, & plani ſecantis, ipſamque in ſuperficie coni ſectionem generantis, communis eſt ſectio in ipſo cono facta. Vnde & ipſi reſpondens, ſiue contigua, parameter etiam principalis dicetur: vt & tranſuerſa diameter principalis: & ex ipſis conſtantes figuræ etiam principales: & coniugatæ diametri principales.

XI.

Aſſumptas coni ſectionum diametros, aut parametros, dicimus diametros omnes & parametros quæcunque ad principales primò poſitas, aut ad axes ſectionum comparantur. Ideoque & aſſumptæ figuræ etiam, & aſſumpta earumdem latera, & aſſumptæ coniugatæ diametri nonnunquam occurrent.

XII.

Vmbilicum parabolæ dicimus, punctum in eiuſdem axe intra ſectionem ſignatum, à ſupremo vertice diſtans ſpatio quadrantis rectæ parametri.

XIII.

Vmbilicos hyperbolarum & ellipſium dicimus, puncta in earumdem vniuſcuiuſque axe ſignata, ab vnoquoque tranſuerſi axis termino diſtantia ſpatio rectæ, cuius quadrato rectangulum

Digitized by Google

rectangulum æquale quartæ parti figuræ, ſub eodem axe tranſuerſo & recta parametro factæ, ipſi tranſuerſo axi applicatum in hyperbola quidem excedit, & in ellipſi deficit.

Notum autem ſuo fiet loco, ejuſmodi vmbilicos puncta eſſe à quibus ipſæ in plano expoſitæ, aut etiam deſcribendæ, ſectiones ortum, & incrementum ſument.

MONITVM.

Hujus loci ratio à nobis exigere videtur, vt de ipſarum coni ſectionum proprijs nominibus quædam adnectamus notatione digna.

Quanquam enim veteribus geometris notæ fuerunt coni ſectiones: non tamen omnifariè ipſis innotuerunt, nec in omni cono. In ſolo enim recto & rectangulo cono ipſis cognita fuit parabola, ſub recti & rectanguli coni ſectionis nomine. In ſolo recto & obtuſiangulo cono hyperbola, ſub recti & obtuſianguli coni ſectionis appellatione. In ſolo denique recto & acutiangulo cono ellipſis, recti & acutianguli coni ſectio ipſis dicta. Primus omnium Apollonius Pergæus geometra inſignis omnes hujuſmodi coni ſectiones in omni cono conſiderauit. Et quæ antiquioribus dicta fuit recti rectanguli que coni ſectio, eandem nouit & acutianguli, & obtuſianguli coni eſſe, ſiue recti, ſiue ſcaleni. Quæque acutianguli recti coni, eandem & rectanguli & obtuſianguli vtriuſque coni eſſe ſectionem. Quò itaque ſingulas ab inuicem diſcerneret, proprijs eas nominibus ornauit: vnamque parabolam, alteram hyperbolam, tertiam denique ellipſim appellauit. Vnde autem ipſis nomina hujuſmodi comparauerit, ſatis tribus primi ſuorum Conicorum libri propoſitionibus, vndecima ſcilicet, duodecima, & decimatertia indicauit. Vbi, rectas à ſingulis dictis ſectionibus ad principales diametros ordinatim applicatas expendens: inuenit, & demonſtrauit in parabola quidem ipſarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia contiguis interceptis diametri portionibus æquales, ad aliquam rectam (quæ ipſi ſectionis recta eſt diameter, ſiue rectum latus, nobis verò parameter,) applicata neque eam excedere, neque ab eadem deficere, ſed ipſi conuenire: quæ noſtra eſt propoſit. 10. *hujus. Vnde & eidem ſectioni, ex ejuſmodi conuenienti applicatione, illud idem ſpeciale & proprium*

Digitized by Google

applicationis, ſiue parabolæ nomen indidit. Sed cum in binis reliquis ſectionibus deprehendiſſet, ordinatim applicatarum quadratis æqualia iſtiuſmodi rectangula ad ſectionis parametrum applicata, in hyperbola quidem ipſam excedere, in ellipſi verò ab eadem deficere figura ſimili ſimiliterque poſita ei quæ à tranſuerſa diametro, & contigua parametro continetur: quæ noſtra eſt propoſ. 12 hujus: indidem illis propria exceſſus & defectus nomina fecit, hanc ellipſim, illam hyperbolam vocitans.

Jllud ipſum autem etiam nos expendentes, non potuimus non moueri cur Apollonius qui, dum ſpecialem & propriam cujuſque coni ſectionis naturam proſequitur, vbique, cum de hyperbola & ellipſi coniunctim egit, eis tertiam, vt coni ſectionem, copulauit circuli circumferentiam: cum tamen de nominibus ipſis imponendis cogitauit, tres tantùm prædictas coni ſectiones agnouiſſe videtur: quas à triplici tantùm rectangulorum ad rectam quampiam applicatione, ab æqualitate ſcilicet aut conuenientia, ab exceſſu, & à defectu indigetauit: quaſi à propria aliqua, & ſpeciali natura cuique ſectioni nomen imponens. Nulla habita circuli circumferentiæ ratione: quæ tamen & ipſi coni ſectio eſt; vt è propoſitionibus quarta, & quinta prioris ſui libri conſtat, (quibus reſpondent noſtræ 2. & 3. hujus) ſuaſque tranſuerſas diametros, & parametros, ideoque & figuras ab ipſis conſtantes habens, hanc etiam æquè ac ellipſis ſibi propriam aſſumit naturam, vt in ipſa ordinatarum quadratis æqualia rectangula, latitudines habentia interceptis diametri portionibus æquales, ad contiguas parametros applicata, ſemper deficiant figura ſimili, ſimiliterque poſita ei quæ à tranſuerſa diametro, & eadem parametro conſtituitur. Quod ex eadem 12. hujus fiet manifeſtum. Vnde ſibi etiam proprium defectus, ſiue ellipſis nomen iure vindicare poſſit: & quidem ellipſis vniformis, quò à vulgari multiformi ellipſi diſtingui valeat.

Veruntamen, ne tam noua nunc agere nos, & proponere, quàm iam inuenta & acta recolere, atque ad communes vſus diſponere, videri voluiſſe inſimulemur: ſua impoſiti nominis laus integra Apollonio in hac parte manebit. Namque & iiſdem nominibus ſunt à nobis inſignitæ prædictæ ſectiones. Atque inſuper ne quem vel tantillùm offendat detectus ſcrupulus, hoc monemus. Quanquam & circuli circumferentia coni ſectio videri poſſit, facta ſcilicet à plano aut æquidiſtante baſi, aut eidem ſubcontrariè poſito: tamen, quoniam hæc ſectio non tam

Digitized by Google

conum diuidit, quàm ipſum reſtituit, (vt è corollarijs primis ad 2, & 3 hujus patet.) Ideò neque circuli circumferentiam propriè coni eſſe ſectionem, neque proprium illi defectus aut ellipſis nomen iure competere viſum nobis fuiſſe. Vnde neque coniunctim in ſequentibus hyperbolæ & ellipſi copulabitur à nobis, ſed diſiunctim, & comparatiuè tantùm: ſuumque priuatum ideò feret aliquando examen, quatenus propoſito iam ſatisfactum non fuerit in Euclideis Elementis.

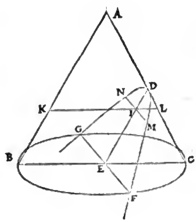
Cæterùm, quas aliundè impoſitorum prædictis coni ſectionibus nominum cauſas Eutocius Aſcalonita ad Apollonij Conica annotauit, ab æqualitate, exceſſu, aut defectu angulorum ab ipſis ſectionum principalibus diametris cum triangulorum per axem alterutro crure comprehenſorum, vnà cum ejuſdem trianguli verticis angulo: quoniam vnius anguli æquales ſint duobus rectis, alterius majores, tertiæ denique minores: ſiue, quod vnius diameter ſit vni crurum trianguli per axem parallela, alterius excedat ejuſdem trianguli verticem, & tertia ſit quaſi circulus diminutus: illa tantò magis nobis probanda videtur, ſi modò à coni ſectionibus circuli circumferentiam excludas, quantò hæc poſterior ridicula, & Eutocio indigna. Vt & incongrua hujuſmodi lineæ ad planum comparatio, cum ellipſim ait circulum diminutum: ipſum circulum conicæ lineæ æquiparans, quæ prolata potiùs circuli circumferentia dici velit.

His itaque præmonitis, & ad conicas definitiones appoſitis, ad ipſas iam coni ſectiones dignoſcendas deinceps pergendum cenſemus: hac quàm proximè monſtramus via & methodo, non ipſa quidem Apolloniana, attamen propria, facili, & maximè ſimplici. Quandoquidem & ipſe Apollonius non aliter ſingulas coni ſectiones proprio nomine cognitas facit, quàm expenſa priùs & cognita propria rectæ cujuſpiam cuique ſectioni inſcriptæ natura. Nos è præmiſſis definitionibus ſingulas arguentes, & proprio nomine notantes: inſcriptarum vnicuique, vel etiam adſcriptarum rectarum propriam naturam conſequenter & neceſſariò demonſtramus eſſe ejuſmodi, qualem ipſe Apollonius expreſſit. Quæ autem proximè ſequetur propoſitio, quanquam Conicorum ordine quarta, certè coni ſectionum prima cenſeri non immeritò debeat.

Digitized by Google

Theor. IIII. Prop. IIII.

Si conus plano per axem ſecetur, ſeceturque & altero plano quod baſim coni ſecet ſecundum rectam lineam quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio ſit alterutri crurum ejuſdem trianguli æquidiſtans; erit facta in ſuperficie coni ſectio parabola: ejuſque diameter communis plani ſecantis & trianguli per axem ſectio.



Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per axem ſecetur quod faciat triangulum B A C: ſeceturque & altero plano, ſecundum lineam F G quæ ſit ad B C perpendicularis, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem F D G: communis autem plani ſecantis, & trianguli B A C ſectio ſit recta linea D E, quæ ſit æquidiſtans A B: Dico factam in ſuperficie coni ſectionem F D G eſſe parabolam, ejuſque diametrum eſſe rectam D E.

Sumpto enim in D E quolibet puncto I, ducatur per I ipſi B C parallela K I L, & per K L planum agatur baſi coni æquidiſtans, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem K M L N: erit vtique, ex 2 hujus, ſectio K M L N circuli circumferentia, cujus diameter erit K L: ejuſdemque & plani per F D G communis ſectio recta M I N erit ipſi F G æquidiſtans: ideoque & ad K L perpendicularis. Eſt autem & F G ad B C baſis coni diametrum perpendicularis. Secta igitur eſt vtraque F G, M N bifariam in E, & I. Quare, ex definitionibus, recta D E ſectionis F M D G erit diameter. Eſtque æquidiſtans A B cruri trianguli per axem: ſectio igitur F M D G, ex iiſdem definit. erit parabola, cujus vertex D, & diameter erit D E. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

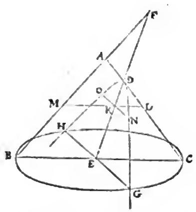
Hinc, & ex definit. patet Vtramque F E, M I, veluti & G E, N I, eſſe à ſectione F D G ad diametrum D E ordinatim applicatam.

Theor. V.

Digitized by Google

THEOR. V. PROP. V.

Si conus plano per axem ſecetur, ſeceturque & altero plano quod baſim coni ſecet ſecundum lineam rectam quæ ſit ad baſim trianguli per axem perpendicularis: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio alterutri crurum ejuſdem trianguli vltra verticem producto occurrat; erit facta in ſuperficie coni ſectio hyperbola, cujus erit diameter communis plani ſecantis & trianguli per axem ſectio.



Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis BC circulus, qui plano per axem ſecetur, quod faciat ſectionem triangulum B A C: ſeceturque & altero plano ſecundum lineam G H perpendicularem ad B C, quod faciat in ſuperficie coni ſectionem G D H: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio ſit recta linea D E, quæ cruri A B vltra verticem A producto occurrat in F: Dico factam in ſuperficie coni ſectionem G D H eſſe hyperbolam, ejuſque diametrum eſſe rectam D E.

Sumpto enim in D E quolibet puncto K, ducatur per K ipſi B C æquidiſtans recta M K L, per quam planum agatur baſi coni æquidiſtans quod faciat in ſuperficie ſectionem M N L O. Circuli igitur circumferentia erit M N L O, ejuſque diameter M L: & communis plani per M N L O cum plano per G D H ſectio, nempè recta NKO, erit ipſi G H æquidiſtans. Quare & perpendicularis erit N O ad M L, quoniam & G H eſt ad B C perpendicularis. Eſt autem & B C baſis coni diameter. Vtraque igitur GH, NO ſecta erit biſariam in E, & K. Ideoque & ſectionis G N D H diameter erit recta D E ex definit. Sed cruri A B vltra verticem A producto occurrit in F: ſectio igitur G N D H ex iiſdem definit. erit hyperbola, ejuſque vertex D, & diameter D E. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc etiam, & ex definit. patet Vtramque G E, N K, veluti & H E, O K, eſſe à ſectione G N D H ad D E diametrum ordinatim applicatam: rectamque D F, ipſi D E

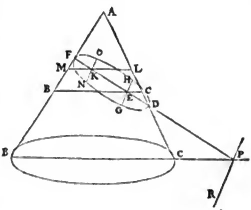
Digitized by Google

diametro in directum poſitam, ejuſdem ſectionis, ſiue hyperbolæ GNDH tranſuerſam eſſe diametrum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si conus plano per axem ſecetur, ſeceturque & altero plano quod baſim coni, aut ejus planum productum, ſecet ſecundum rectam lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ad eam quæ ipſi in directum eſt, ſit perpendicularis: communis autem plani ſecantis, & trianguli per axem ſectio vtrique crurum ejuſdem trianguli infra verticem occurrat, baſi non æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita: conuſque, ſi opus eſt, produci intelligatur; erit facta in ſuperficie coni ſectio ellipſis, cujus erit diameter communis plani ſecantis & trianguli per axem ſectio.

Sit conus ABC, cujus vertex A, baſis BC circulus, qui plano per axem ſecetur faciente triangulum BAC: ſeceturque & alio plano ſecante baſim coni, aut planum ejus productum, ſecundum lineam GH, aut PR, quæ ad BC, aut ad CP ipſi in directum poſitam, ſit perpendicularis: & ſit facta in ſuperficie coni ſectio GFH: communis autem plani ſecantis & trianguli per axem ſectio ſit linea FE, aut FD, quæ vtrique AB, AC cruri occurrat in D, & F, & baſi BC non ſit æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita: Dico factam in ſuperficie coni ſectionem GFH eſſe ellipſim, ejuſque diametrum eſſe rectam FE, aut FD.



Sumpto enim in FE quolibet puncto K, ducatur per K recta MKL æquidiſtans BC. Perque ML planum agatur baſi coni æquidiſtans, quod faciat in ſuperficie ſectionem MNLO. Erit igitur, ex 2 hujus, MNLO circuli circumferentia, cujus erit diameter ML. Communis autem plani per MNLO cum plano GFH, aut FPR, ſectio ſit recta NKO: erit NKO ipſi GH, aut PR æquidiſtans: ideoque & ad ML perpendicularis. Secta igitur erit NO bifariam in K. Eademque ratione & GH ipſi NO æquidiſtans ſecta erit bifariam in E. Quare, ex definit. recta FKE ſectionis GFHD erit diameter. Sed vtrique cruri AB, AC infra verticem A occurrit,

Digitized by Google

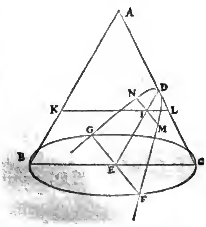
& non eſt baſi BC æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſita: ſectio igitur GFHD, ex ijſdem definit. erit ellipſis, cujus vertex vterque erit F & D, & diameter FE, aut FD. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Atque hinc etiam, & ex definit. ſequitur Vtramque GE & NK, veluti & HE, OK, eſſe à ſectione GFDH ad diametrum FE ordinatim applicatam: rectamque FD ejuſdem ſectionis, ſiue ellipſeos GFHD tranſuerſam eſſe diametrum.

Theor. VII. Prop. VII.

In omni parabola, ſi à ſectione ad diametrum binæ rectæ lineæ ſint ordinatim applicatæ; erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt contiguæ ab ipſis interceptæ ad verticem diametri portiones.



Exponantur eadem quæ in 4 hujus, vbi à ſectione, ſiue parabola FDG ordinatim ad diametrum DE ſunt applicatæ FE, MI: Dico vt DE ad DI, ita eſſe FE quadratum ad quadratum MI.

Quoniam enim vtraque BC, KL diameter eſt circuli: & ſunt perpendiculares FE, MI: (hoc enim iam oſtenſum eſt) erunt ſingulis BEC, KIL rectangulis æqualia ſingula FE, MI quadrata. Quare erit BEC rectangulum ad KIL rectangulum, vt FE quadratum ad MI quadratum. Sed propter æquidiſtantes AB, DE, recta KI rectæ BE eſt æqualis. Igitur BEC rectangulum ad KIL rectangulum erit, vt EC recta ad rectam IL: hoc eſt, vt DE ad DI. Quare, vt DE ad DI, ita erit FE quadratum ad MI quadratum. Quod erat demonſtrandum.

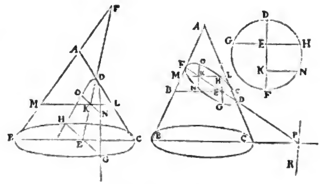
Theor. VIII. Prop. VIII.

In omni hyperbola, vel ellipſi, vt & in circuli circumferentia, ſi à ſectione ad interceptam diametrum binæ rectæ lineæ ordinatim ſint applicatæ; erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt rectangula ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque tranſuerſæ termino ſumptis ad inuicem.

Exponantur eadem quæ in 5 & 6 hujus, vbi à ſectione GDH ad

Digitized by Google

diametrum D E ordinatim ſunt applicatæ G E, N K: Dico vt rectangulum F E D ad rectangulum F K D, ita eſſe quadratum G E ad quadratum N K.

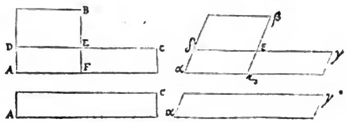


Quoniam enim vtraque B C, M L diameter eſt circuli, & ad eas ſunt perpendiculares G E, N K, vt ibidem oſtenſum eſt: erunt ſingulis G E, N K quadratis æqualia ſingula B E C, M K L rectangula. Ideoque erit G E quadratum ad N K quadratum, vt BEC rectangulum ad MKL rectangulum. Sed ratio BEC rectanguli ad rectangulum MKL compoſita eſt ex ratione BE ad MK, hoc eſt F E ad F K, & ex ratione E C ad K L, hoc eſt, E D ad K D: compoſita igitur F E D rectanguli ad F K D rectangulum ratio eadem eſt compoſitæ B E C rectanguli ad M K L rectangulum. Igitur vt rectangulum F E D ad rectangulum F K D, ita erit quadratum G E ad N K quadratum. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem hîc in hyperbola, & ellipſi demonſtratum eſt, verum etiam eſſe iam conſtat ex element. geomet. in circuli circumferentia: vbi ſingularum à circumferentia ad diametrum ordinatim ductarum, vt hîc G E, N K, quadrata ſunt ſingulis rectangulis ſub diametri partibus, vt F E D, F K D, æqualia.

Lemma I. Prop. IX.

Si ſit quadratum quodlibet, & rhombus quadrato æquilaterus: atque etiam rectangulum quodcunque, & parallelogrammum ipſi æquilaterum, rhomboque æquiangulum; vt quadratum ad rectangulum, ita erit rhombus ad parallelogrammum: & conuerſim.



Sit quadratum A B, & rectangulum A C, itemque rhombus $\alpha\beta$, & parallelogrammum $\alpha\gamma$, rhombo $\alpha\beta$ æquiangulum: ſit autem & rhombus $\alpha\beta$ quadrato A B æquilaterus, & parallelogrammum $\alpha\gamma$ rectangulo A C æquilaterum: Dico vt quadratum

quadratum A B ad rectangulum A C, ita eſſe rhombum αβ ad parallelogrammum αγ.

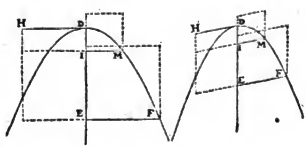
Ad communes enim A & α angulos componantur rectangulum quidem A C quadrato A B, & parallelogrammum αγ rhombo αβ. Sitque quadrati A B latus A F: & rhombi, αζ. Igitur propter æquales A F, αζ, itemque A D, αδ, erit vt A B quadratum ad D F rectangulum, ita αβ rhombus ad δζ parallelogrammum: & vt A E, hoc eſt D F, rectangulum ad A C rectangulum, ita parallelogrammum αε ad parallelogrammum αγ. Igitur, ex æquali, vt A B quadratum ad A C rectangulum, ita erit αβ rhombus ad αγ parallelogrammum. Et conuerſim. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc patet, & Si ſint bina rectangula, & bina parallelogramma binis rectangulis æquilatera, & inuicem æquiangula; ita eſſe bina parallelogramma inuicem, vt bina rectangula inuicem.

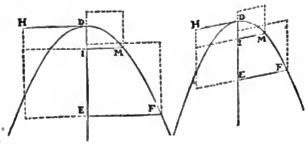
THEOR. IX. PROP. X.

In omni parabola, ſi à vertice ſectionis recta ſit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidiſtans, quæ ſe habeat ad quamlibet interceptam ejuſdem diametri portionem, vt quadratum contiguæ ordinatim applicatæ ad ejuſdem interceptæ diametri portionis quadratum; erunt ſingularum omnium ab eadem ſectione ad eandem diametrum ordinatim applicatarum quadratis, vel rhombis, æqualia ſingula rectangula, vel parallelogramma, eidem rectæ à vertice ductæ adjacentia, latitudineſque aut latera habentia interceptas diametri portiones à vertice.



Sit parabola F D, cujus vertex D, & diameter D E ad quam à ſumpto quolibet in ſectione puncto F ſit ordinatim applicata recta F E, cui æquidiſtans à vertice ducta ſit D H, quæ ſe habeat ad D E, vt F E quadratum ad E D quadratum: à quolibet autem alio in ſectione puncto M ipſi F E æquidiſtans ducatur M I: ordinatim igitur applicata erit M I. Dico rectangulum vel parallelogrammum H D I quadrato vel rhombo ex M I eſſe æquale,

Quoniam enim vt FE quadratum ad DE quadratum, ita eſt HD ad DE, hoc eſt ita HDE rectangulum ad DE quadratum; erit quadrato FE æquale rectangulum HDE. Itemque, ex anteced. rhombo ex FE æquale HDE parallelogrammum ipſi æquiangulum. Sed vt FE quadratum ad MI quadratum, ita, ex 7 hujus, eſt recta DE ad rectam DI, hoc eſt ita HDE rectangulum ad HDI rectangulum: igitur, permutando, vt FE quadratum vel rhombus ad HDE rectangulum vel parallelogrammum, ita erit MI quadratum vel rhombus ad HDI rectangulum vel parallelogrammum. Eſtque quadrato vel rhombo FE æquale oſtenſum rectangulum vel parallelogrammum HDE: igitur & quadrato vel rhombo ex MI erit æquale rectangulum vel parallelogrammum rhombo æquiangulum HDI. Quod erat demonſtrandum.



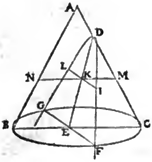
COROLL.

Hinc patet, & ex definit. Rectam DH eſſe ſectionis ſiue parabolæ FMD parametrum, ſiue iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ad eandem DE diametrum ordinatim applicantur.

THEOR. X. PROP. XI.

Si in coni ſectione diameter quampiam rectam lineam bifariam ſecet; & omnes ipſi æquidiſtantes in eadem ſectione ductas bifariam quoque ſecabit.

Sit coni ſectio quæcunque FDG, cujus diameter DE: ductaque FEG recta bifariam ſecta ſit in E. A quolibet autem alio ſectionis puncto I in ipſa ducta ſit recta IL æquidiſtans FG quam ſecet in K diameter DE: Dico rectam IL bifariam eſſe ſectam in K.



Sit enim FDG coni ABC ſectio, cujus baſis & plani ſectionem FDG facientis communis ſectio ſit recta FG. Seceturque rurſus ABC conus per axem, & per lineam BC quæ ſit ad FG perpendicularis, plano quod faciat ſectionem triangulum BAC: & per K ducatur NKM æquidiſtans BC. Perpendicularis igitur erit

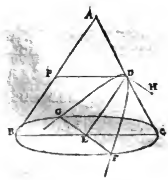
IKL ad NM. Sed ſecto ABC cono plano per rectas NM, KI, erit ſectio NIML baſi æquidiſtans, ideoque &, per 2 hujus, circuli circumferentia, cujus erit diameter NKM: biſariam igitur ſecta erit recta IL in K. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Hinc patet, Rectam quamcunque in coni ſectione à diametro biſariam ſectam ad eandem diametrum eſſe ordinatim applicatam.

Theor. XI. Prop. XII.

Si conus plano per axem ſectus, rurſus alio plano ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio parabola; quæ erit ratio rectanguli ſub trianguli per axem cruribus ad baſis ejuſdem quadratum, eadem erit & rectæ vtroque ſectionis & coni vertice interceptæ ad contiguam ſectionis parametrum.



Sit conus ABC, cujus vertex A, baſis BC circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum BAC: qui rurſus plano ſecetur ſecundum lineam FG quæ ſit ad baſim BC perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio FDG parabola, cujus ſit diameter DE: ſit autem & eiuſdem parameter DH ipſi DE diametro contigua: Dico vt BAC rectangulum ad BC quadratum, ita eſſe AD rectam ad DH ſectionis parametrum.

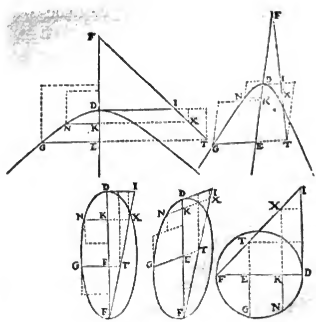
Ducatur DP parallela BC. Quoniam igitur ſectio FDG eſt parabola, eiuſque diameter DE; erit DE æquidiſtans AB: ideoque & DP æqualis BE. Quoniam autem BC circuli diameter eſt, & ad eam perpendicularis FG; erit FG biſariam ſecta in E: quare & ad DE diametrum ordinatim applicata, ex anteced. Quadrato igitur EF erit, ex 10 huius, rectangulum EDH æquale: & vt DE quadratum ad EF quadratum, hoc eſt BEC rectangulum, ita erit DE ad DH: hoc eſt ſumpta AD communi altitudine, ita ADE rectangulum ad ADH rectangulum: &, permutando, vt DE quadratum ad ADE rectangulum, hoc eſt vt ADE rectangulum ad AD quadratum, ita erit BEC rectangulum ad ADH rectangulum: rurſuſque permutando, vt ADE rectangulum ad BEC rectangulum, ita erit AD quadratum ad ADH rectangulum: hoc eſt ita AD

Digitized by Google

ad D H. Sed ratio A D E rectanguli ad B E C rectangulum compoſita eſt ex ratione A D ad B E, ſiue D P, hoc eſt A C ad C B: & ex ratione D E ad E C, hoc eſt A B ad B C: quare, componendo, vt A D E rectangulum ad BEC rectangulum, ita erit B A C rectangulum ad B C quadratum. Igitur vt B A C rectangulum ad B C quadratum: ita erit A D ad D H. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XII. Prop. XIII.

In omni hyperbola, vel ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, ſi à vertice ſectionis recta ſit ordinatim ad diametrum applicatis ducta æquidiſtans, quæ ſe habeat ad tranſuerſam diametrum, vt cujuſlibet ordinatim applicatæ quadratum ad rectangulum ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque tranſuerſæ termino ſumptis; erunt ſingularum omnium ab eadem ſectione ad eandem diametrum ordinatim ductarum quadratis vel rhombis æqualia ſingula rectangula vel parallelogramma eidem rectæ à vertice ductæ adiacentia, latitudineſque aut latera habentia interceptas à vertice diametri portiones, & in hyperbola quidem excedentia, in ellipſi autem, veluti & in circuli circumferentia, deficientia figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis ei quæ à tranſuerſa diametro, & eadem recta à vertice ducta formatur.



Sit hyperbola, aut ellipſis, veluti & circuli circumferentia G D, cujus vertex D, tranſuerſa diameter F D: & à quolibet in ſectione puncto G ſit ordinatim applicata G E: & vt F E D rectangulum ad E G quadratum, ita ſit F D ad D I: ſitque D I ducta ipſi E G æquidiſtans: iungaturque F I, quæ in hyperbola producatur: à quolibet autem alio in ſectione puncto N ipſi G E æquidiſtans ducatur N K, quæ, producta vbi opus, occurrat F I in X: ordinatim

igitur

igitur applicata eſt NK. Dico rectangulum vel parallelogrammum DX ipſi DI adiacens, latitudinemque aut latus habens DK, & in hyperbola quidem excedens, at in ellipſi, vt & in circuli circumferentia, deficiens figura IX ſimili ſimiliterque poſita ei quæ rectis FD, DI formatur, quadrato ſiue rhombo NK eſſe æquale.

Producatur GE donec occurrat FI in T. Quoniam igitur eſt FD ad DI, vt FED rectangulum ad EG quadratum: & vt FD ad DI, ita eſt FE ad ET, hoc eſt ita rectangulum FED ad rectangulum DET: erit vt FED rectangulum ad EG quadratum, ita FED rectangulum ad DET rectangulum. Quadrato igitur EG æquale erit rectangulum DET: vel, ex 9 hujus, rhombo EG æquale DET parallelogrammum ipſi æquiangulum. Sed vt FD ad DI, ita eſt etiam FK ad KX: & ita FKD rectangulum ad rectangulum DKX: igitur vt FED rectangulum ad rectangulum DET, ita erit FKD rectangulum ad rectangulum DKX: &, permutando, vt FED rectangulum ad FKD rectangulum, ita DET rectangulum ad rectangulum DKX. Vt autem FED rectangulum ad FKD rectangulum, ita eſt, ex 8 hujus, quadratum GE ad quadratum NK: igitur vt quadratum GE ad quadratum NK, ita erit rectangulum DET ad rectangulum DKX: &, permutando, vt EG quadratum vel rhombus ad rectangulum vel parallelogrammum DET rhombo æquiangulum, ita erit NK quadratum vel rhombus ad rectangulum vel parallelogrammum DKX. Eſtque iam quadrato ſiue rhombo ex GE æquale oſtenſum rectangulum aut parallelogrammum DET. Quare & quadrato ſiue rhombo ex NK æquale etiam erit rectangulum aut parallelogrammum DX. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Hinc igitur, & ex definit. patet Rectam DI dictarum ſectionum eſſe parametrum, hoc eſt ad quam comparantur, & iuxta quam poſſunt rectæ quæ à dictis ſectionibus ad eandem DE diametrum ordinatim applicantur. Quæ & figuræ FDI latus dicitur coefficiens ad FD ejuſdem tranſuerſum latus.

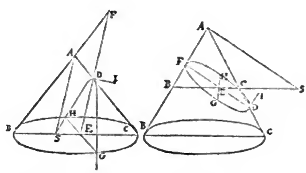
COROLL. II.

Sed & hoc etiam fit manifeſtum In hyperbola, vel ellipſi, vt & in circuli circumferentia, ordinatim à ſectione ad diametrum ductarum quadrata ſiue rhombos eſſe ad rectangula ſiue parallelogramma ſub contiguis diametri portionibus ab vtroque tranſuerſæ termino ſumptis, vt contigua parameter ad eandem tranſuerſam diametrum: ſiue, vt coefficiens figuræ latus ad idem tranſuerſum: & conuerſim.

Digitized by Google

THEOR. XIII. PROP. XIIII.

Si conus plano per axem ſectus rurſus alio plano ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ipſi æquidiſtantem, ſit perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, cujus diametro parallela acta ſit à vertice coni ad baſim ejuſdem, vbi opus productam; quæ erit ratio quadrati ductæ parallelæ ad rectangulum ſub contiguis baſis partibus ab vtroque ejuſdem termino ſumptis, eadem erit & tranſuerſæ ſectionis diametri ad ejuſdem contiguam parametrum.



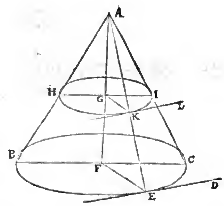
Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum B A C: qui rurſus plano ſecetur ſecundum lineam G H, quæ ſit ad BC baſim, aut ipſi æquidiſtantem, perpendicularis: & ſit formata in ſuperficie coni ſectio hyperbola, aut ellipſis quælibet G D H, cujus vertex ſit D, & tranſuerſa diameter D F, cui à vertice trianguli A ad baſim B C, vbi opus productam, parallela acta ſit A S: ſit autem D I ſectionis parameter, ſiue iuxta quam poſſunt quæ à ſectione ad F D E diametrum ordinatim applicantur: Dico vt A S quadratum ad B S C rectangulum, ita eſſe FD ad D I.

Quoniam enim B C circuli diameter eſt, & ad eam perpendicularis G H: erit G H bifariam ſecta in E: ideoque &, ex 11 hujus, recta GE ad D E diametrum ordinatim applicata: eritque rectangulo B E C quadratum E G æquale. Quoniam autem eſt FE ad E B, vt A S ad S B: & D E ad E C, vt A S ad S C: erit, componendo, F E D rectangulum ad B E C rectangulum, hoc eſt E G quadratum, vt A S quadratum ad B S C rectangulum. Sed vt F E D rectangulum ad E G quadratum, ita eſt, ex antecedente, tranſuerſa F D diameter ad D I contiguam parametrum: igitur vt A S quadratum ad B S C rectangulum, ita erit F D tranſuerſa ſectionis diameter ad D I contiguam ejuſdem parametrum. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

THEOR. XIIII. PROP. XV.

Si circulum qui baſis eſt coni recta contingat linea in eodem exiſtens plano, & à vertice coni per contactum recta agatur; planum per vtramque productum ſuperficiem coni continget: eritque contactus in eadem linea à vertice coni ducta.



Sit conus ABC, cujus vertex A, baſis BC circulus, quem in E circumferentiæ baſis puncto recta contingat linea DE in eodem plano exiſtens. Iuncta autem AE, planum intelligatur per AED productum: Dico planum AED coni ABC ſuperficiem contingere, & contactum eſſe in linea AE.

Secetur enim ABC conus plano per axem quod faciat ſectionem triangulum BAC: ſectaque BC bifariam in F, iungantur AF, FE: ſumptoque in AE quolibet puncto K, ducatur ad AF ipſi EF æquidiſtans KG, & ipſi ED æquidiſtans ponatur KL. Seceturque rurſus ABC conus plano per lineam KG quod baſi æquidiſtet, & ſectionem faciat in ſuperficie lineam HKI: erit, ex 2 hujus, HKI ſectio circuli circumferentia, ejuſque diameter HI, & centrum G. Quoniam autem GK æquidiſtat FE, & KL ipſi ED: erit angulus GKL angulo FED æqualis. Eſt autem angulus FED rectus, quoniam FE per centrum tranſit, & contingit ED: rectus igitur erit & GKL angulus: ideoque & KL circumferentiam HKI circuli continget in K. Eſtque KL æquidiſtans ED: ideoque & in eodem plano quod per AE tranſit: circuli igitur circumferentiam HKI planum per AED ductum continget in K. Idemque eadem ratione de quocunque alio ſumpto in AE puncto demonſtrabitur. Planum igitur per AED ductum ſuperficiem coni ABC continget: eritque contactus in linea AE. Quod erat demonſtrandum.

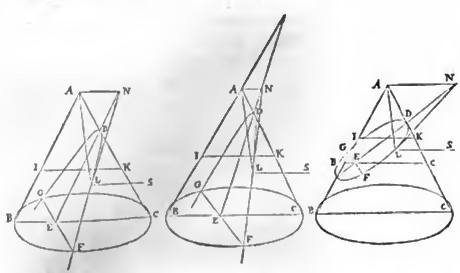
COROLL.

Hinc patet, & Si circulum baſi coni æquidiſtantem recta contingat linea in eodem exiſtens plano; planum per coni verticem & per contingentem productum coni ſuperficiem contingere.

Digitized by Google

THEOR. XV. PROP. XVI.

Si conus plano per axem ſectus rurſus plano quod neque baſi æquidiſtet, aut ſubcontrariè ſit poſitum, neque per verticem tranſeat, ſecetur ſecundum lineam quæ ad baſim trianguli per axem, aut ipſi æquidiſtantem, ſit perpendicularis, faciatque in ſuperficie ſectionem quamcunque: & ſumpto quolibet in facta ſectione puncto, per ipſum recta agatur circuli, qui baſis eſt coni, aut ipſi æquidiſtat, circumferentiam contingens, & in eodem exiſtens plano: ſiquidem ducta contingens baſi trianguli per axem æquidiſtat; quæ à vertice trianguli ducetur contingenti æquidiſtans productæ ſectionis diametro occurret in puncto, à quo ad aſſumptum in eadem ſectione punctum ducta recta linea ipſam ſectionem in eodem præaſſumpto puncto continget. At ſi ducta contingens productæ trianguli baſi, aut ipſi æquidiſtanti, occurrat; quæ ab ejuſdem trianguli vertice ad contingentis occurſum ducetur productam ſectionis diametrum ſecabit in puncto, à quo item ad præaſſumptum in ſectione punctum ducta recta linea ipſam in eodem puncto ſectionem continget.



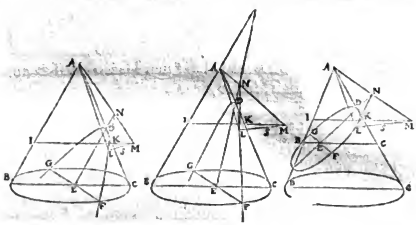
Sit conus A B C, cujus vertex A, baſis B C circulus, qui plano per axem ſectus faciente triangulum B A C, rurſus plano neque baſi æquidiſtante, aut ſubcontrariè poſito, neque per verticem tranſeunte, ſecetur ſecundum lineam F G quæ ſit ad baſim B C, aut ipſi æquidiſtantem, perpendicularis: & ſit facta in ſuperficie coni ſectio quæcunque ſiue parabola, ſiue hyperbola, aut etiam ellipſis, F D G, cujus ſit

Digitized by Google

diameter D E: ſumptoque in ſectione puncto quolibet L, ducta ſit L S circuli I K L baſi coni æquidiſtantis circumferentiam contingens in L, in eodemque exiſtens plano. Siquidem primùm L S æquidiſtat B C: ducatur eidem æquidiſtans A N, occurrens productæ E D diametro in N: iungaturque N L. Dico rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

Intelligatur enim A I K conus, ex 2. hujus, cujus vertex A, baſis I L K circulus, quem in L circumferentiæ baſis puncto contingat recta L S: iungaturque A L. Igitur planum per A L S productum, ex anteced. coni ſuperficiem continget: eritque contactus in linea A L. Quoniam autem æquidiſtat A N ipſi L S: erunt A N, L S in vno eodemque contingente plano. Eademque ratione & A N, B C in eodem erunt trianguli per axem plano, in quo & E D ſectionis F D G diameter producta in N, per 4, 5, & 6 hujus. Punctum igitur N erit & in producta diametro, & in plano per A L S coni ſuperficiem, ideoque & factam in ea ſectionem F D G contingente in L. Quare ducta N L in eodem erit per A L S plano ſectionem F D G contingente in L: ideoque & ipſa N L eandem F D G ſectionem in eodem L puncto continget. Quod 1. erat demonſtrandum.

Non æquidiſtet autem contingens L S ipſi B C: ſed ei, aut ipſi æquidiſtanti I K, communi ſcilicet L K circuli & trianguli per axem



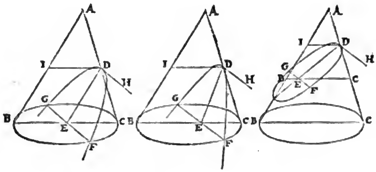
ſectioni productæ, occurrat in M: iunctaque A M productam F D G ſectionis diametrum E D ſecet in N: ducaturque N L. Dico rurſus rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

Quoniam enim, ducta, vt priùs, A L, planum per A L M coni ſuperficiem contingit: erit recta A M & in plano contingente, & in plano trianguli per axem producto, in quo & E D ſectionis diameter producta in N. Punctum igitur N in eadem erit diametro producta, & in plano per A L M coni ſuperficiem, ideoque & factam in ea ſectionem F D G contingente in L. Quare & ducta N L erit in eodem per A L M plano ſectionem F D G contingente in L: ideoque & ipſa N L eandem F D G ſectionem in eodem L puncto continget. Quod 2. erat demonſtrandum.

Digitized by Google

Theor. XVI. Prop. XVII.

Si à vertice cujuſcunque coni ſectionis recta ducatur ordinatim ad diametrum applicatis æquidiſtans; ipſa ſectionem in eodem verticis puncto continget.



Sit ſectio quæcunque F D G, ſiue parabola, ſiue hyperbola, aut etiam ellipſis, cujus ſit diameter DE, & vertex D: ſitque ad D E diametrum ordinatim applicatá F G, cui à vertice D æquidiſtans ducatur D H: Dico D H ſectionem F D G contingere in D.

Sit enim, vt in antecedente, F D G ſectio quæcunque in coni A B C ſuperficie facta: ſitque communis baſis coni & plani per FDG ſectio recta F G. Seceturque rurſus A B C conus plano per axem, & per lineam B C quæ ſit ad F G perpendicularis, vt ſit facta ſectio triangulum B AC: & per D ipſi B C æquidiſtans ducatur D I. Perpendicularis igitur erit D H ad D I. Quare ſecto A B C cono plano per D I æquidiſtante baſi, ſectio, per 2 hujus, circulus erit, ejuſque diameter D I, cujus circumferentiam continget in D recta HD. Planum igitur per A D H ductum, per 15 huius, ipſam coni ſuperficiem continget: eritque contactus in linea A D. Continget igitur & idem per A D H planum ſectionem F D G in eodem communi D puncto. Quare & in eodem D puncto eandem F D G ſectionem continget recta H D. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. I.

Hinc ſit manifeſtum Cujuſcunque ſectionis parametrum ſectionem in vertice contingere: quoniam & à vertice ducitur ordinatim applicatis æquidiſtans ex definit.

Coroll. II.

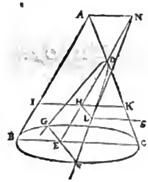
Atque hinc etiam ſit manifeſtum Rectam quæ coni ſectionem in vertice contingit ordinatim ad diametrum applicatis eſſe æquidiſtantem.

Digitized by Google

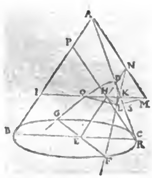
THEOR. XVII. PROP. XVIII.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta ſit ordinatim applicata; erunt interceptę vtrinque à vertice diametri portiones æquales.

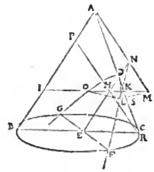
Sit parabola F D G, cuius diameter D E, vertex D. Sectionem autem contingat in L, recta L N diametro D E occurrens in N: & ad diametrum ordinatim ſit applicata L H. Dico H D eſſe æqualem D N.



Sit enim FEG recta ęquidiſtans LH. Et ipſa FDG parabola coni ABC ſit ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta FG. Sectuſque intelligatur ABC conus plano per axem quod faciat triangulum B A C, & communem cum baſe ſectionem rectam B C ad F G perpendicularem: ducaturq; per H recta I H K æquidiſtans BC: & per rectas I K, H L planum ductum conum ſecet; erit vtique ſectio baſi coni æquidiſtans, ideoque circulus, per 2 huius, cuius diameter erit I K perpendicularis ad H L. Sit autem primùm punctum H eiuſdem circuli centrum: ideoque & I H æqualis HK. Ducta igitur LS æquidiſtans IK, propter angulum IHL rectum, eiuſdem I L K circuli circumferentiam continget in L: & ducta per A ipſi L S æquidiſtans recta A N productæ E D ſectionis diametro occurret in N, per 16 huius: eritque, propter ſectionem, recta H N æquidiſtans AI: ideoque & A N æqualis I H, hoc eſt H K: quare & H D erit æqualis D N. Quod 1. erat demonſtrandum.



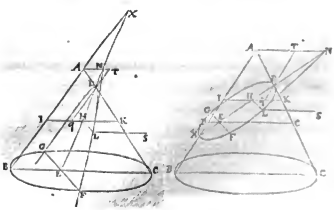
Non ſit autem iam punctum H circuli I L K centrum: ſed maior minorve ſit I H quam H K. Secta igitur bifariam I K in O, erit O centrum circuli I L K: & ducta L S perpendicularis ad O L eius circumferentiam continget in L: &, propter angulum HOL acutum, diametro I K productæ occurret. Occurrat in M. Iuncta igitur AM productam ſectionis diametrum E D ſecabit in eodem N puncto, per 16 huius. Ducatur inſuper ipſi A M æquidiſtans per H recta P H R occurrens A B in P, & A C, ſi opus eſt productæ, in R. Quoniam igitur perpendicularis eſt O L ad L M, & L H ad I K: erit rectangulum M H O æquale rectangulo



IHK. Quare erit MH ad HI, vt HK ad HO: &, componendo, MI ad HI, vt KO ad HO. Sed permutando erit MH ad KH, vt HI ad HO: &, diuidendo, MK ad KH, vt IO, hoc eſt KO, ad HO: igitur vt MI ad HI, hoc eſt vt AM ad PH, ita erit MK ad KH, hoc eſt AM ad HR. Æqualis igitur erit HR ipſi PH. Vt autem RH ad HP, ita eſt RD ad DA: & ita HD ad DN: æqualis igitur erit & HD ipſi DN. Quod 2 erat demonſtrandum.

THEOR. XVIII. PROP. XIX.

Si hyperbolem, aut ellipſim, vt & circuli circumferentiam recta contingat linea productæ diametro occurrens, & à contactu ad diametrum recta ſit ordinatim applicata; erunt diametri portiones ab vtroque tranſuerſæ termino ad contingentem ſumptæ inuicem, vt eiuſdem diametri portiones vtroque eodem reſpondente termino & ordinatim ducta interceptæ inuicem.

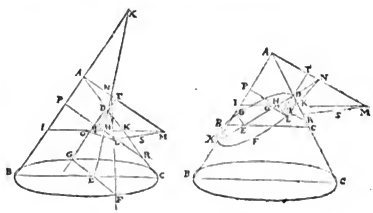


Sit hyperbola, vel ellipſis FDG, cuius vertex D tranſuerſa diameter XD. Contingat autem ſectionem in L recta LN cum diametro conueniens in N: & ad diametrum XD, vbi opus productam, ordinatim ſit applicata LH: Dico vt XH ad HD, ita eſſe XN ad ND. Sit enim FEG recta æquidiſtans LH. Et ipſa FDG hyperbola, aut ellipſis, coni ABC ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta FG. Sectuſque intelligatur ABC conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, & communem cum baſe coni ſectionem rectam BC ad FG perpendicularem. Ducaturque per H recta IHK æquidiſtans BC: & per rectas IK, HL planum productum conum ſecet; erit vtique ſectio ILK baſi coni æquidiſtans, ideoque circulus, per 2 huius, cuius diameter erit IK perpendicularis ad HL. Sit autem primùm punctum H eiuſdem ILK circuli centrum, ideoque & IH æqualis HK.

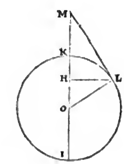
Ducta

Ducta igitur L S æquidiſtans I K, propter angulum IHL rectum, circuli ILK circumferentiam continget in L. Quare, per 16 huius, ducta per A ipſi LS æquidiſtans recta AN productæ, vbi opus, ſectionis diametro XDE occurret in N. Ducatur per D recta q D T æquidiſtans A B, occurrenſque rectæ I K in q, & rectæ A N, vbi opus productæ, in T. Erit igitur vt XH ad HD, ita HI, hoc eſt K H, ad Hq: & ita A N ad N T. Sed vt AN ad NT, ita eſt XN ad ND: igitur vt XH ad H D, ita erit X N ad N D. Quod 1 erat demonſtrandum.

Non ſit autem iam punctum H circuli I L K centrum: ſitque maior, minorve, I H quam H K. Secta igitur I K bifariam in O, erit O centrum circuli ILK: & ducta L S perpendicularis ad O L eiuſdem circumferentiam continget in L: &, propter angulum H O L acutum, productæ I K diametro occurret. Occurrat in M. Iuncta igitur A M productam, vbi opus, ſectionis diametrum XDE ſecabit in eodem N puncto, per 16 huius. Quare ſi, ducta, vt in antecedente factum eſt, per H ipſi AM æquidiſtante recta PHR: & oſtenſa, vt ibidem, recta RH æquali HP: ducatur, vt prius, per D recta q D T æquidiſtans A B, occurrens P R in q, & ipſi A M in T; erit vt X H ad H D, ita H P, hoc eſt R H, ad H q: & ita A N ad N T: Ideoque & ita X N ad N D. Quod 2 erat demonſtrandum.



Et in circuli quidem circumferentia I L K in plano expoſita, quam contingit in L recta L M cum producta I K diametro conueniens in M, & à cuius puncto L ad I K diametrum ordinatim eſt applicata L H: illud idem, quod propoſitum eſt, nempe ita eſſe I M ad M K, vt I H ad H K: ſic demonſtrabitur.

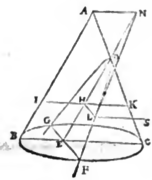


Erecta perpendiculari L O, vt ſit O centrum circuli; erit quadrato H L æquale vnumquodque I H K, O H M rectangulum. Quare vt M H ad H I, ita erit K H ad H O: &, componendo, vt M I ad H I, ita erit K O ad HO. Sed, permutando, vt MH ad KH, ita etiam erit HI ad HO: &, diuidendo, vt MK ad KH, ita K O ad H O: Igitur I M ad H I erit vt M K ad K H: &, permutando, erit I M ad M K, veluti I H ad H K. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

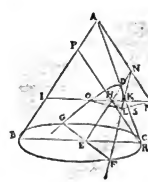
Digitized by Google

THEOR. XIX. PROP. XX.

Si in parabola à ſumpto quolibet in ſectione puncto recta ad diametrum ordinatim ſit applicata: & interceptæ diametri portioni à vertice æqualis in directum apponatur; recta quæ à facto in producta diametro termino ad aſſumptum in ſectione punctum ducetur, ſectionem in eodem aſſumpto puncto continget.



Sit parabola FDG, cuius vertex D, diameter DE. A ſumpto autem in ſectione puncto quolibet L, ordinatim ad DE diametrum ducta ſit LH: & producta HD in N, vt ſit DN æqualis HD, iungatur NL: Dico rectam NL parabolam FDG contingere in L. Sit enim, vt in 18 huius, parabola FDG coni ABC ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta FEG æquidiſtans LH. Sectuſque primùm ABC conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, cuius baſis ſit ad FG perpendicularis, rurſus per HL ſecetur plano baſi æquidiſtante quod in ſuperficie faciat, per 2 huius, ſectionem ILK circuli circumferentiam, cuius ſit diameter IHK æquidiſtans BC. Iuncta autem AN primùm æquidiſtet IK: eidemque æquidiſtans ducatur LS. Quoniam igitur vt ND ad DH, ita eſt AN ad KH: erit AN æqualis HK. Sed, propter ſectionem, recta AN æquatur IH: igitur & IH æqualis erit HK: & punctum H centrum erit circuli ILK. Eſt autem & LH perpendicularis ad IK, & LS ipſi æquidiſtans: angulus igitur HLS eſt rectus. Quare & circuli ILK circumferentiam contingit in L recta LS in eodem exiſtens plano: & ei æquidiſtat AN productæ ED ſectionis diametro occurrens in N: ducta igitur NL, per 16 huius, ſectionem FDG continget in L. Quod 1. erat demonſtrandum.



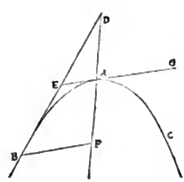
Non æquidiſtet autem AN ipſi IK: ſed producta occurrat productæ IK in M: (occurret enim quoniam in eodem ſunt trianguli BAC plano:) eique æquidiſtans per H ducatur PHR: iungaturque LM. Cum ſit igitur vt ND ad DH, ita AD ad DR: & ita PH ad HR: erit AD æqualis DR & PH æqualis HR. Eſt autem DK minor quam DR: & vt AD ad DK, ita eſt IH ad HK: minor igitur erit HK quam IH. Sit ergo IO æqualis

Digitized by Google

OK: ideoque & O centrum circuli ILK: iungaturque OL. Quoniam igitur vt AM ad RH, ſiue HP, ita eſt MK ad KH: & ita MI ad HI: erit, permutando, vt MK ad MI, ita KH ad HI: &, componendo, vt vtraque MK, MI ad MI, ita erit IK ad HI: & antecedentium dimidia, vt MO ad MI ita erit KO ad HI. Quare, conuertendo, & per conuerſionem rationis, vt MI ad KO, ita erit HI ad HO: &, permutando, vt MI ad HI, ita erit KO ad HO: diuidendoque, vt MH ad HI, ita erit KH ad HO. Rectangulum igitur MHO rectangulo IHK, hoc eſt, propter IHL angulum rectum, quadrato HL erit æquale: ideoque & OLM angulus erit rectus: & propterea recta LM in eodem circuli ILK exiſtens plano eius circumferentiam continget in L. Ducta autem AM productam ED diametrum ſecat in N: quare, ex 16 huius, ducta NL ſectionem FDG continget in L. Quod 2. erat demonſtrandum.

THEOR. XX. PROP. XXI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens; quæ à vertice ad ipſam recta ducetur linea ordinatim applicatis æquidiſtans poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti rectanguli, vel parallelogrammi, ſub producta diametro & contigua parametro.



Sit parabola BAC, cujus diameter AF, & vertex A. Contingatque ſectionem in B recta BD diametro FA productæ occurrens in D. A vertice autem ducatur AE ordinatim ad AF diametrum applicatis æquidiſtans, occurrenſque contingenti BD in E. Et ſit ſectionis parameter AG. Dico rectam AE poſſe quadrato, vel rhombo, quartam partem rectanguli, vel parallelogrammi, ſub rectis DA, AG.

Sit enim à puncto B ad AF diametrum ducta BF æquidiſtans AE. Ordinatim igitur erit applicata BF: eritque, ex 10 hujus, quadrato, vel rhombo, ex BF æquale rectangulum, vel parallelogrammum, FAG. Sed, propter contingentem BD, recta AD rectæ AF erit æqualis, ex 18 hujus: igitur & rectangulum BAG rectangulo FAG erit æquale, ſiue parallelogrammum parallelogrammo: rectaque FB erit rectæ AE dupla: & propterea quadratum FB quadrati AE quadruplum: & rhombus rhombi quadruplus. Rectangulum igitur, vel parallelogrammum, DAG quadrati, vel rhombi, ex AE erit quadruplum: ideoque & recta AE poterit quadrato, vel rhombo

quartam partem rectanguli, vel parallelogrammi, ſub rectis D A, A G. Quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM GENERALE.

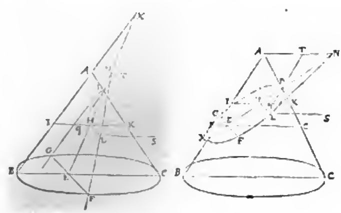
Itaque In parabola, ſiue dato in ſectione puncto quolibet indidem recta ad diametrum ordinatim ſit applicata, & ſumantur hinc inde à vertice diametri portiones æquales: ſiue dato in producta diametro quolibet puncto, ſumatur aliud æqualiter à vertice diſtans, à quo ad ſectionem educatur recta ordinatim applicata; quæ data, aut acquiſita, huiuſmodi in producta diametro & in ſectione puncta recta iunget linea, ex anteced. ſectionem continget.

Atque etiam Recta quæ à dato in producta diametro puncto ducetur ad terminum rectæ à vertice eductę ordinatim applicatis æquidiſtantis, cuiuſque quadratum æquale ſit quartæ parti rectanguli ſub eadem producta diametro & contigua parametro, tandem producta ſectionem, ex hac, continget.

THEOR. XXI. PROP. XXII.

Si in hyperbola, aut ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, à ſumpto quolibet in ſectione puncto recta ad diametrum ordinatim ſit applicata: &, quæ fuerit diametri portionum applicata & vtroque tranſuerſæ termino interceptarum ratio inuicem, eadem ſit eiuſdem diametri partium ab eodem vtroque reſpondente termino ad punctum in ea ſignatum ſumptarum inuicem; recta linea quæ à ſignato in diametro puncto ad aſſumptum in ſectione punctum ducetur, ſectionem in eodem præaſſumpto puncto continget.

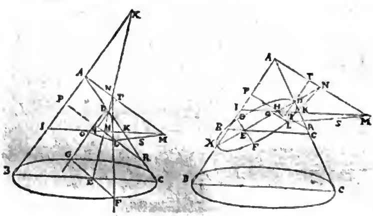
Sit hyperbola, vel ellipſis F D G, cuius vertex D, tranſuerſa diameter X D. A ſumpto autem quolibet in ſectione puncto L ad X D diametrum, vbi opus productam, ordinatim ſit applicata L H: & vt X D ad H D, ita ſit X N ad N D: ducaturque



turque N L. Dico rectam N L ſectionem F D G contingere in L.

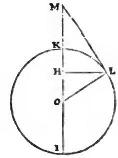
Sit enim, vt in 19 huius, F D G hyperbola, vel ellipſis, coni A B C ſectio, cuius baſis & plani ſecantis communis ſectio ſit recta F E G æquidiſtans L H. Sectuſque iam A B C conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, cuius baſis B C ſit ad F G perpendicularis, rurſus ſecetur plano per HL baſi coni æquidiſtante quod faciat, per 2 huius, in ſuperficie ſectionem I LK circuli circumferentiam, cuius ſit diameter I H K æquidiſtans B C. Ducta autem A N primùm æquidiſtet I K: eidemque æquidiſtans ducatur LS, & per D ipſi AB æquidiſtans qDT. Erit igitur vt X H ad H D, hoc eſt H I ad H q, ita X N ad N D, hoc eſt A N ad N T, ſiue K H ad H q: quare vt H I ad H q, ita erit K H ad Hq. Æqualis igitur erit K H ipſi H I: eritque H centrum circuli I L K. Ideoque &, propter angulum I H L rectum, ducta L S æquidiſtans diametro IK, circuli ILK circumferentiam continget in L: &, propter ipſi æquidiſtantem A N productæ, vbi opus, diametro X D occurrentem in N, ducta N L, per 16 huius, ſectionem F D G continget in L. Quod 1. erat demonſtrandum.

Non æquidiſtet autem A N diametro I K, ſed eidem productæ occurrat producta in M: (in eodem enim ſunt trianguli B A C plano:) eique æquidiſtans per H ducatur P H R, & per D ipſi AB æquidiſtans qDT coincidens PR in q, & ipſi AM in T: iungaturque L M. Oſtendetur igitur 1, vt in antecedente factum eſt, recta I H maior minorve quam H K: ideoque & ſecta I K bifariam in O, erit O centrum circuli I L K. Deinde, vt in antecedente, & in 19 huius, oſtendetur recta PH æqualis HR: &, propter æquidiſtantes A M, P R, itemque L H, F G, & I H, B C, ideoque & angulum I H L rectum, oſtendetur, vt in eadem 19 huius, ducta O L ad L M perpendicularis: & propterea L M circuli I L K circumferentiam contingere in L. Sed ducta A M ſectionis F D G diametrum X D, vbi opus, productam, ſecat in N: ducta igitur N L eandem F D G ſectionem, per 16 huius, continget in L. Quod 2. erat demonſtrandum.



Et in circuli circumferentia I L K in plano expoſita, illud idem quod propoſitum eſt, nempe, ſi vt I H ad H K, ita ſit I M ad M K: & educta ſit perpendicularis H L; rectam M L ductam circuli circumferentiam contingere in L, ſic conſtabit. Quoniam enim vt I H

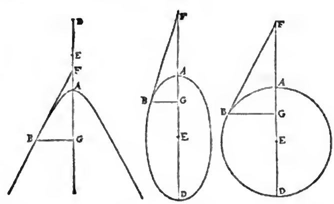
ad HK, ita eſt IM ad MK: &, componendo, vt IK ad KH, ita vtraque IM, MK ad MK; erit, ſumptis antecedentium dimidiis, vt OK ad KH, ita OM ad MK. Sed, per conuerſionem rationis, vt OK ad HO, ita erit OM ad KO: igitur, ex æquali, & permutando, vt HK ad MK, ita erit HO ad KO: &, componendo, vt HK ad HM, ita erit HO ad IH. Quare rectangulum MHO æquale erit rectangulo IHK, hoc eſt quadrato HL. Ducta igitur OL perpendicularis erit ad LM. Ideoque & LM circuli ILK circumferentiam continget in L. Quare omninò conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXII. PROP. XXIII.

Si hyperbolem, aut ellipſim, vt & circuli circumferentiam, recta contingat linea cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim ſit applicata; erit quadrato dimidiæ tranſuerſæ diametri æquale rectangulum ſub interceptis ordinatim ducta & contingente diametri portionibus à centro ſumptis.

Sit hyperbola, vel ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, AB, cujus vertex A, tranſuerſa diameter AD, & centrum E. Sectionem autem contingat in B recta BF cum diametro DA, vbi opus producta, conueniens in F: & ad diametrum ſit ordinatim applicata BG: Dico quadrato AE æquale eſſe rectangulum GEF.

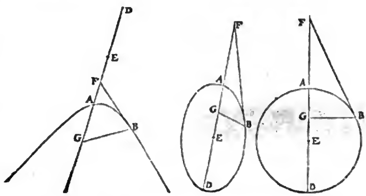


Quoniam enim, ex 19 hujus, vt DG, ad GA, ita eſt DF ad FA; erit, in hyperbola, vt vtraque DG, GA ad GA, ita DA ad FA: &, antecedentium dimidia, vt EG ad GA, ita EA ad FA: &, per conuerſionem rationis, vt EG ad EA, ita EA ad EF. In ellipſi autem, vt & in circuli circumferentia, erit, componendo, vt DA ad GA, ita vtraque DF, FA ad FA: &, antecedentium dimidia, vt AE ad AG, ita FE ad FA: &, per conuerſionem rationis, vt AE ad GE, ita FE ad AE. Quare vtrinque quadrato AE erit æquale GEF rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

THEOR. XXIII. PROP. XXIIII.

Iiſdem poſitis; erit, in dictis ſectionibus, rectangulo ſub diametri partibus vtroque tranſuerſæ termino & contingente interceptis æquale rectangulum ſub ejuſdem diametri partibus contingenti contiguis à centro & ordinatim applicata ſumptis.

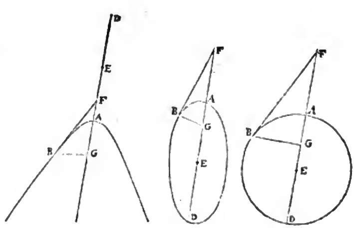


Sint eadem quæ in antecedente: Dico rectangulum GFE rectangulo DFA eſſe æquale.

Quoniam enim oſtenſum eſt vt GE ad EA, ita eſſe AE ad EF: erit, componendo, vt GD ad DE, ita DF ad EF: &, permutando, vt GD ad DF, ita DE ad EF: &, diuidendo, vt GF ad DF, ita AF ad EF. Rectangulo igitur DFA æquale erit GFE rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIIII. PROP. XXV.

Iiſdem adhuc poſitis; erit, in dictis ſectionibus, rectangulo ſub diametri partibus vtroque tranſuerſæ termino & ordinatim applicata interceptis æquale rectangulum ſub ejuſdem diametri partibus applicatæ contiguis à centro & contingente ſumptis.



Sint adhuc eadem quæ in 23 hujus: Dico rectangulo DGA æquale eſſe rectangulum EGF.

Quoniam enim, ex eadem 23 hujus, vt GE ad EA, ita eſt EA ad EF: erit, per conuerſionem rationis, vt GE ad GA, ita EA ad AF: &,

Digitized by Google

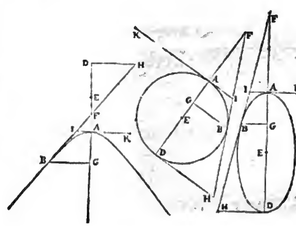
permutando, vt GE ad EA, ita GA ad AF: &, componendo, vt GE ad GD, ita GA ad GF. Quare rectangulo DGA æquale erit rectangulum EGF. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Hinc igitur, & ex coroll. ad 13 *hujus patet* In hyperbola, & ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, omne rectangulum ſub diametri partibus contingenti contiguis à centro & ordinatim à contactus puncto applicata ſumptis, vt hìc EGF, eſſe ad quadratum ordinatim applicatæ, vt BG, veluti tranſuerſa ſectionis diameter ad contiguam parametrum: ſiue, vt tranſuerſum figuræ ſectionis latus ad coefficiens.

Theor. XXV. Prop. XXVI.

Si hyperbolem, aut ellipſim, veluti & circuli circumferentiam, recta contingat linea: & ab vtroque tranſuerſæ diametri termino rectæ ordinatim applicatis æquidiſtantes eidem occurrant; quæ ex ipſis à contingente abſcindentur portiones, quadranti figuræ ad diametrum factæ æquale continebunt rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum.



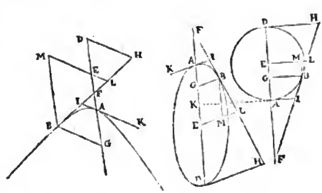
Sit hyperbola, aut ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, AB, cujus vertex A, diameter tranſuerſa DA, & centrum E. Contingat autem ſectionem in B recta BF, cui productæ occurrant in H, & I rectæ DH, AI ordinatim applicatis æquidiſtantes. Et ſit ſectionis parameter, ſiue coefficiens figuræ latus recta AK. Dico quadranti figuræ DAK æquale eſſe rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum, rectis HD, AI contentum.

Sit enim ordinatim applicata BG: & in quo contingens BF diametro occurrit ſit punctum F. Quoniam igitur contingit BF diametro occurrens in F, & ordinatim eſt applicata BG; erit, ex 23 hujus, rectangulum GFE rectangulo DFA æquale. Quare erit vt GF quadratum ad GFE rectangulum, hoc eſt vt GF ad EF, ita GF quadratum

quadratum ad D F A rectangulum. Sed ratio G F quadrati ad D F A rectangulum compoſita eſt ex ratione G F ad D F, hoc eſt B G ad H D, & ex ratione G F ad F A, hoc eſt B G ad A I: quare, componendo, vt G F quadratum ad D F A rectangulum, hoc eſt vt G F ad F E, ita erit B G quadratum ad rectangulum rectis H D, A I contentum. Vt autem G F ad F E, ita eſt E G F rectangulum ad G E F rectangulum, hoc eſt, ex 22 hujus, ad A E quadratum: igitur vt E G F rectangulum ad A E quadratum, ita erit B G quadratum ad rectangulum H D, A I: &, permutando, vt E G F rectangulum ad B G quadratum, hoc eſt, ex antecedente, vt D A ad A K, ita erit A E quadratum ad rectangulum H D, A I. Sed vt D A ad A K, ita eſt D A quadratum ad D A K rectangulum: & ita A E quadratum ad quadrantem rectanguli D A K: igitur vt A E quadratum, vel rhombus, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, D A K, ita erit A E quadratum, vel rhombus, ad rectangulum, ſiue parallelogrammum figuræ D A K æquiangulum, rectis H D, A I contentum. Quadranti igitur figuræ, hoc eſt rectanguli, ſiue parallelogrammi, D A K æquale eſt rectangulum, vel parallelogrammum, ipſi D A K æquiangulum, rectis H D, A I contentum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXVI. PROP. XXVII.

Si hyperbolem, aut ellipſim, velutì & circuli circumferentiam, recta contingat linea occurrens ei quæ per centrum ſectionis ordinatim applicatis ducetur æquidiſtans: & à tactu recta diametro parallela eidem per centrum ductæ occurrat; erit quadranti figuræ ad diametrum factæ æquale rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum, ſub interceptis per centrum ductæ partibus à diametro factis contentum.

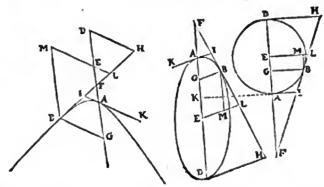


Sit hyperbola, aut ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, B A, cujus vertex A, tranſuerſa diameter A D, & centrum E. Contingatque ſectionem in B recta B F: & per centrum E ducatur M E L ordinatim ad D A diametrum applicatis æquidiſtans, occurrenſque contingenti B F in L: & à contactu B ipſi A D diametro æquidiſtans ducatur B M, occurrens M L in M: ſitque A K

K

ſectionis parameter, ſiue coefficiens figuræ latus. Dico quadranti figuræ D A K æquale eſſe M E L rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum.

Sit enim ordinatim applicata B G. Et à punctis A & D ipſi B G æquidiſtantes ducantur D H, A I contingenti occurrentes in H, & I. Quoniam igitur contingit B F diametro occurrens in



F; erit, ex 22 hujus, rectangulo G F E æquale rectangulum D F A: quare vt G F ad D F, hoc eſt vt B G ad H D, ita erit F A ad F E, hoc eſt ita A I ad E L. Rectangulum igitur rectis B G, E L contentum, hoc eſt rectangulum M E L rectangulo ſub rectis H D, A I, ſiue parallelogrammum M E L parallelogrammo ipſi æquiangulo H D, A I, hoc eſt, ex antecedente, quadranti figuræ D A K erit æquale. Quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM GENERALE.

Conſtat igitur ex ſupra oſtenſis, Si in hyperbola, aut ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, B A, cujus ſit vertex A, diameter tranſuerſa A D, & centrum E, ſumpto quolibet punctorum B, aut F, aut G, quadrato A E æquale ſit rectangulum G E F, & ordinatim applicata B G, vt in 22 hujus; aut rectangulo D F A æquale ſit rectangulum E F G; vel rectangulo D G A æquale rectangulum E G F, ordinatimque ducta B G, vt in 23 & 24; aut vt tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum, ita ſit rectangulum E G F ad B G ordinatim applicatæ quadratum, vt in coroll. ad 24; aut quadranti figuræ D A K ad D A tranſuerſam diametrum factæ æquale ſit alterutrum H D, A I, aut M E L rectangulum, vel parallelogrammum figuræ D A K æquiangulum, vt hîc & in antecedente; in omnibus his caſibus rectam H B ſectionem B A contingere in B. Illud enim conuerſo demonſtrationis modo facilè oſtendetur.

MONITVM.

Quæ promiſcuè hactenus circa coni ſectionum generationes, & propriam cujuſque naturam, de quibuſlibet diametris, &

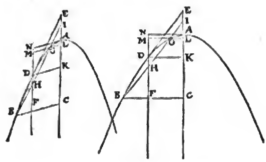
Digitized by Google

rectis à ſectione ad eaſdem ordinatim applicatis, aut aliter ductis, generaliter, & in quibuſcunque conis (ſingularibus tamen, vt de oppoſitis ſectionibus adhuc taceamus) ſumus ſpeculati: eadem ſpeciatim in cono ſcaleno, pro illis diametris duntaxat ad quas à ſectione ordinatæ in angulo obliquo applicantur, etiam ſpeculari licebit. Vt intelligamus in omnibus ſectionibus eadem quibuſlibet aſſumptis diametris conuenire, & accidere, quæ axi: ſi modo ab vmbilicorum inquiſitione abſtineamus, qui in ſolo axe latent. Quandoquidem ſi conus quilibet ſcalenus plano iam per axem ſectus non ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur ſecundum lineam quæ ſit ad baſim trianguli per axem perpendicularis, alio plano formante quæſitam quamcunque in ſuperficie coni ſectionem; erit ſectionis diameter communi plani ſecantis & baſis coni ſectioni inclinata, ideoque & ad eam à ſectione ordinatim ductæ in angulo obliquo applicabuntur. Attamen & eadem erit eiuſdem ſectionis, ſiue in coni ſcaleni ſuperficie, ſiue in plano ipſam formante conſiderata, diameter ex generatione, & principalis, ac veluti alter axis: (quidni enim, quando & conis ſcalenis ſui ſunt axes, quanquam obliqui?) Et de ejuſmodi diametro eadem omnia hactenus præmiſſa, vt & ea quæ in ſequentibus proponentur, æquè adæquatè prædicari poterunt, ac de axe ejuſdem ſectionis ſiue in plano, ſiue in ſecti ab eo recti vel ſcaleni coni ſuperficie contemplatæ. Neque enim vlla cujuſlibet coni ſectionis in plano expoſitæ vtcunque aſſumpta diameter proponetur, quæ non ſit alicuius coni ſcaleni ſectionis ejuſdem diameter ex generatione, & principalis. Quare vnum hoc præmiſsis addendum ſupereſt, vt inſtituendæ coni ſectionum in plano ſpeculationi ſatisfaciant: nempè in parabola diametros omnes principali diametro, ſiue ex generatione, ideoque & inuicem eſſe æquidiſtantes. At in hyperbola, & ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, diametros omnes inclinatas eſſe inuicem, & coeuntes, perque commune cuiuſque ſectionis centrum tranſire. Ideoque in parabola quæcunque diametro æquidiſtans recta proponetur, & ipſa quoque ejuſdem parabolæ diameter erit. At in hyperbola, & ellipſi, veluti in circuli circumferentia, quæcunque recta proponetur per ſectionis centrum ducta, aut eidem occurrens, & intra ſectionem perducta, ejuſdem quoque ſectionis erit diameter. Quod proximè ſequentibus ſatis fiet manifeſtum.

Digitized by Google

THEOR. XXVII. PROP. XXVIII.

Si parabolam recta contingat linea; quæ per tactum diametro, aut axi, æquidiſtans intra ſectionem ducetur, rectas omnes in ſectione ductas contingenti æquidiſtantes bifariam ſecabit.



Sit cuiuſcunque coni ſectio parabola B A, cuius principalis, ſiue ex generatione diameter, vel etiam axis, ſit A C. Sectionemque contingat in D recta D E. Ducta autem per D recta D F ipſi A C diametro parallela, à quolibet ſectionis puncto B ducatur in ipſa recta B G æquidiſtans D E, quæ à recta D F ſecetur in H: Dico rectam B G à recta D F bifariam ſecari in H.

Producta enim D E occurrat diametro C A productæ in E: eidemque producta B G occurrat in I: ordinatimque ſint applicatæ B F C, D K, L G M, A N. Quoniam igitur D E ſectionem contingit diametro occurrens in E, & ordinatim applicata eſt D K; erit, ex 18 hujus, A E æqualis A K. Parallelogrammum igitur K N triangulo D K E erit æquale. Sed propter ſimilitudinem triangulorum D K E, G L I, vt D K quadratum ad G L quadratum, ita erit triangulum D K E ad triangulum G L I: & ita, ex 7 huius, A K ad A L, hoc eſt parallelogrammum K N ad parallelogrammum L N: &, permutando, vt triangulum D K E ad parallelogrammum K N, ita triangulum G L I ad parallelogrammum L N. Parallelogrammum igitur L N triangulo G L I etiam æquale erit. Eademque ratione & parallelogrammum CN triangulo B C I oſtendetur æquale. Ablatis igitur vtrinque æqualibus, parallelogrammo ſcilicet L N, & triangulo G L I; erit reliquum B G L C quadrilaterum reliquo C M parallelogrammo æquale: & ablato communi quinquelatero F H G L C, erit reliquum B H F triangulum reliquo G H M triangulo æquale, & ſimile. Recta igitur B H rectæ H G erit æqualis. Et ſunt puncta B & G in ſectione; ducta igitur D F diametro A C æquidiſtans rectam B G in ſectione ductam bifariam ſecabit in H. Sed & ſimiliter quamcunque aliam contingenti D E æquidiſtantem bifariam ſecare oſtendetur. Conſtat igitur propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

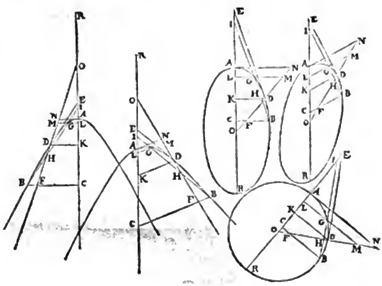
Hinc, & ex definit. patet, Rectam D F, & quamcunque aliam

Digitized by Google

aliam principali diametro A C æquidiſtantem, etiam ſectionis ſiue parabolæ BA eſſe diametrum. Ideoque, & quæcunque ex præmiſſis, & ſequentibus, principali diametro conuenientia erunt, eadem & eidem DE diametro, & eiuſmodi omnibus alijs aptè conuenire.

THEOR. XXVIII. PROP. XXIX.

Si hyperbolem, vel ellipſim, vt & circuli circumferentiam recta contingat linea; quæ per tactum & centrum recta intra ſectionem ducetur, rectas omnes in eadem ſectione ductas contingenti ęquidiſtantes bifariam ſecabit.

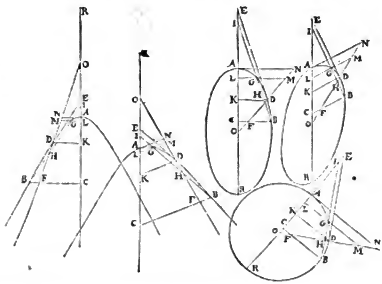


Sit cuiuſcunque coni ſectio hyperbola, vel ellipſis, vt etiam circuli circumferentia, B A, cuius principalis, ſiue ex generatione diameter, vel etiam axis, ſit A C, & centrum O. Sectionemque in D contingat recta D E, cui æquidiſtans à quolibet alio ſectionis puncto B recta in ipſa ducatur B G. Per centrum autem O, & contactum D, ducta O D & producta, vbi opus, rectam B G ſecet in H: Dico B G bifariam ſecari in H.

Productæ enim D E, B G cum A C diametro conueniant in E, & I: ordinatimque ad O C diametrum ſint applicatæ B F C, D K, L G M, A N. Quoniam igitur D E ſectionem contingit productæ diametro occurrens in E: & ordinatim eſt applicata D K; erit, ex 23 huius, quadrato O A æquale rectangulum K O E. Quare vt K O quadratum ad O A quadratum, hoc eſt vt K O D triangulum ad A O N triangulum, ita erit K O ad O E: hoc eſt ita K O D triangulum ad O E D triangulum. Triangulum igitur O E D triangulo A O N erit æquale: ideoque & reliquum N K quadrilaterum reliquo D E K triangulo æquale. Quoniam autem vt K O quadratum ad O A quadratum, ita eſt K O D triangulum ad A O N triangulum, & permutatim; in hyperbola quidem, vt totum O K

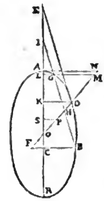
Digitized by Google

quadratum ad totum KOD triangulum, ita erit reliquum RKA rectangulum ad reliquum NK quadrilaterum. Similiterque oſtendetur, vt totum OL vel OC quadratum ad totum OLM, vel OCF, triangulum, ita eſſe reliquum RLA, vel RCA, rectangulum ad reliquum NL, vel NC, quadrilaterum. At in ellipſi, vt & in circuli circumferentia, vt ablatum OK quadratum ad ablatum KOD triangulum, ita erit reliquum RKA rectangulum ad reliquum NK quadrilaterum. Similiterque vt ablatum OL, vel OC, quadratum ad ablatum OLM, vel OCF, triangulum, ita erit reliquum RLA, vel RCA rectangulum ad reliquum NL, vel NC, quadrilaterum. Cum igitur vtrinque ſit vt OK quadratum ad KOD triangulum, ita RKA rectangulum ad NK quadrilaterum: & ita RLA, vel RCA rectangulum ad NL, vel NC, quadrilaterum; erit, permutando, RKA rectangulum ad RLA, vel RCA rectangulum, vt quadrilaterum NK ad quadrilaterum NL, vel NC. Vt autem rectangulum RKA ad rectangulum RLA, vel RCA, ita, ex 8 huius, eſt quadratum DK ad quadratum GL, vel BC: hoc eſt ita DEK triangulum ad triangulum GLI, vel BCI: vt igitur quadrilaterum NK ad quadrilaterum NL, vel NC, ita erit triangulum DEK ad triangulum GLI, vel BCI: & permutatim. Sed triangulo DEK oſtenſum eſt æquale NK quadrilaterum: igitur & triangulo GLI æquale erit quadrilaterum NL: & triangulo BIC æquale quadrilaterum NC. Ablatis igitur æqualibus, triangulo ſcilicet GIL, & quadrilatero NL, erit reliquum LB quadrilaterum reliquo MC quadrilatero æquale. Communi igitur ablato FHGLC quinquelatero, erit reliquum MHG triangulum reliquo BHF triangulo æquale: & propter æquidiſtantes MG, BF etiam ſimile. Recta igitur BH rectæ HG erit æqualis. Et ſunt puncta B, G in ſectione: igitur per centrum O, & contactum D, ducta ODH rectam BG in ſectione ductam bifariam ſecabit in H. Quod erat demonſtrandum.



Quoniam autem ſæpiùs euenire poteſt, vt in ellipſi, veluti & in circuli circumferentia, à ſumpto in ſectione puncto B ad AC

Digitized by Google



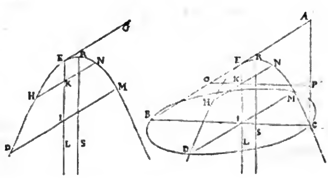
diametrum ordinatim ducta BC infra centrum O ad partes R cadat, occurrens DO productæ in F: ſumpta hoc caſu, in OD, recta OP æquali OF, ductaque PS æquidiſtante DK, vt ſit OPS triangulum triangulo OFC ſimile & æquale; oſtendetur, vt priùs, triangulum BCI quadrilatero NS eſſe æquale. Additiſque æqualibus OPS, OFC triangulis erit quadrilaterum BIOF triangulo NAO, hoc eſt quadrilatero MGIO, æquale. Rurſuſque ablato communi HIO triangulo, fiet triangulum MHG triangulo BHF, vt priùs, æquale & ſimile: ideoque & recta BH rectæ HG æqualis. Sed & eadem ratione, à quocunque alio ſumpto ſectionis puncto ducta in ipſa recta contingenti DE æquidiſtans à recta OD per centrum & contactum ducta bifariam ſecari oſtendetur: conſtat igitur omninò propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc igitur etiam, & ex definit. patet, Rectam OD, & quamcunque aliam per centrum ſectionis O ductam, eiuſdem ſectionis eſſe diametrum: ideoque, & in dictis ſectionibus quæcunque, ſiue ex præmiſſis, ſiue ex ſequentibus, principali diametro, ſiue ex generatione, conuenient, eadem & ipſi OD diametro, & eiuſmodi omnibus alijs per centrum & quodlibet ſectionis punctum ductis, aptè conuenire.

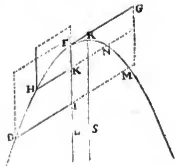
THEOR. XXIX. PROP. XXX.

Si in parabola binæ quælibet rectæ à ſectione ad aſſumptam quamcunque rectam diametro, aut axi, parallelam ducantur æquidiſtantes ei quæ ſectionem in eiuſdem aſſumptæ termino contingit; erunt æquidiſtantium quadrata inuicem, vt contiguæ eiuſdem aſſumptæ portiones à contactu inuicem.



Sit cuiuſcunque coni ſectio parabola DER, cuius diameter, vel axis, RS, cui æquidiſtans ſumatur recta quæcunque EL. Sectionem autem contingat in E recta GE. Sumptiſque in ſectione binis quibuſlibet punctis D, & H, ducantur

E ducta eſt diametro RS æquidiſtans EL: atque à ſectione ad EL ducta eſt contingenti EG æquidiſtans DI. Vt autem DI quadratum ad EI quadratum, ita ſit recta EG ad rectam EI: & à quolibet alio in ſectione puncto H ducta ſit ipſi EG æquidiſtans HK. Dico parallelogrammum GEK rhombo ipſi æquiangulo ex HK eſſe æquale.



Quoniam enim vt DI quadratum ad EI quadratum, ita eſt GE ad EI, hoc eſt ita GEI rectangulum ad EI quadratum: erit quadrato DI æquale rectangulum GEI: itemque & rhombo DI æquale parallelogrammum ipſi æquiangulum GEI, ex 9 huius. Quoniam autem, ex antecedente, vt EI ad EK, hoc eſt vt GEI rectangulum ad GEK rectangulum, ita eſt DI quadratum ad HK quadratum: erit, permutando, vt GEI rectangulum ad DI quadratum, ita GEK rectangulum ad HK quadratum: & ita GEK parallelogrammum ad HK rhombum ipſi æquiangulum. Rectangulum autem GEI quadrato DI eſt æquale: æquale igitur erit & rectangulum GEK quadrato HK: atque etiam rhombo HK æquale parallelogrammum GEK ipſi æquiangulum. Quod erat demonſtrandum.

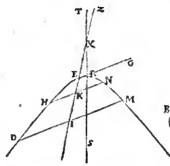
COROLL.

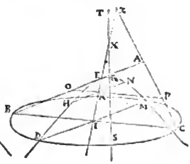
Ex his itaque ſatis iam manifeſtum fit, Rectam EL parabolæ DER diametro, ſiue etiam axi, RS æquidiſtantem eiuſdem parabolæ etiam diametrum eſſe, quæ in expoſito, in antecedente, cono ABC ſcaleno oſtenſa eſt principalis, ſiue ex generatione. Eiuſque verticem punctum E ſectionis quoque eſſe verticem: & parametrum, ſiue iuxta quam poſſunt à ſectione ad eandem EL diametrum ordinatim ductæ, eſſe rectam GE. Atque etiam propter rectas DM, HN æquidiſtantes in ſectione ductas, & bifariam ſectas in I, & K, vtramque DI, HK veluti & MI, NK eſſe à ſectione ad eandem EL diametrum ordinatim applicatam. Itaque & à ſectione ad quamcunque parabolæ diametrum ordinatim applicatarum quadrata eſſe inuicem, vt interceptæ ab iiſdem eiuſdem diametri portiones à vertice inuicem, ſiue vt rectangula ſub ijſdem portionibus & contigua parametro facta inuicem, veluti etiam & rhombos eſſe inuicem, vt æquiangula parallelogramma ſub ijſdem rectis contenta inuicem.

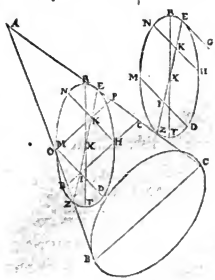
Digitized by Google

Theor. XXXI. Prop. XXXII.

Si in hyperbola, aut ellipſi, binæ quælibet rectæ à ſectione ad aſſumptam quamcunque rectam per centrum ductam agantur æquidiſtantes ei quę ſectionem in communi aſſumptę rectæ termino contingit; erunt æquidiſtantium quadrata inuicem, vt rectangula ſub contiguis eiuſdem aſſumptæ partibus à dicto termino & ab altero æqualiter à centro diſtante ſumptis inuicem.







Sit cuiuſcunque coni ſectio hyperbola, aut ellipſis, DER, cuius diameter, ſiue axis, RS, centrum X. Ducta autem ad ſectionem quacunque recta XE, eandem ſectionem contingat in E recta EG: & producta EX in Z, vt ſit ZE æqualis XE: ſumantur bina quælibet in ſectione puncta D, H, à quibus ipſi EG æquidiſtantes ducantur DI, IK occurrentes XE in I, & K: Dico vt rectangulum ZIE ad rectangulum ZKE, ita eſſe quadratum DI ad quadratum HK.

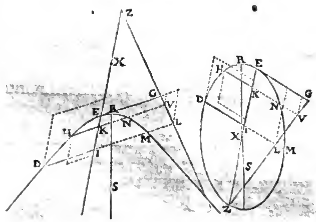
Sit enim in expoſito ABC cono ſcaleno facta ipſa ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, DER. Sectoque primùm ABC cono plano per axem faciente triangulum BAC, & producta DI ad ſectionem in M, intelligatur DM plani conum ſecantis, & in ejus ſuperficie hyperbolam, aut ellipſim, DER formantis & baſis coni, vel circuli ipſi æquidiſtantis, communis ſectio quæ ſit ad BC eiuſdem baſis coni diametrum, aut ipſi æquidiſtantem, perpendicularis. Erit igitur IM æqualis DI, ex 28 huius: quare, & punctum M in ipſa circuli qui baſis eſt coni, aut ipſi æquidiſtat, circumferentia erit. Similiter & producta HK ad ſectionem in N, oſtendetur KN æqualis HK: & punctum N in circuli baſi æquidiſtantis eſſe circumferentia, cuius erit diameter communis eiuſdem cum triangulo per axem ſectio recta OKP ipſi

Digitized by Google

B C æquidiſtans, ex 2 huius. Quadrato igitur D I æquale erit rectangulum B I C: & quadrato H K æquale rectangulum O K P. Quare, ex 8 huius, vt rectangulum Z I E ad rectangulum Z K E, ita erit quadratum D I ad quadratum H K. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXII. PROP. XXXIII.

Iiſdem poſitis. Si vt DI quadratum ad rectangulum ZIE, ita ſit ſumpta in contingente recta GE ad rectam EZ; erunt contingenti æquidiſtantium à ſectione ad aſſumptam rectam per centrum ductam applicatarum rhombis ſingulis æqualia ſingula æquiangula parallelogramma eidem contingenti adiacentia, lateraque habentia contiguas interceptas à contactu eiuſdem aſſumptæ portiones, & in hyperbola quidem excedentia, at in ellipſi deficientis figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis ei quæ ab aſſumpta per centrum ducta & contingente formatur.



Sint igitur eadem quæ in antecedente. Et vt D I quadratum ad Z I E rectangulum, ita fiat E G ad EZ. Iungaturque ZG quæ in hyperbola producatur. A ſumpto autem quolibet alio in ſectione puncto H ducta ſit ipſi G E æquidiſtans H K, quæ, producta vbi opus, occurrat Z G in N: Dico parallelogrammum E V rhombo ipſi æquiangulo ex H K eſſe æquale.

Producatur D I, vbi opus eſt, vt occurrat Z G in L. Quoniam igitur vt D I quadratum ad Z I E rectangulum, ita eſt G E ad E Z: hoc eſt ita L I ad I Z: ſiue ita L I E rectangulum ad Z I E rectangulum: erit L I E rectangulum quadrato D I æquale. Atque etiam, ex 9 huius, parallelogrammum E L rhombo ex D I ipſi æquiangulo æquale. Sed, ex antecedente, vt Z I E rectangulum ad Z K E rectangulum, ita eſt D I quadratum ad H K quadratum: igitur, permutando, vt Z I E rectangulum ad DI quadratum, ſiue L I E rectangulum, hoc eſt vt Z I ad I L, ita erit rectangulum ZKE ad H K quadratum. Sed vt Z I ad I L, ita eſt Z K ad K V, hoc eſt ita Z K E rectangulum ad rectangulum E K V: igitur vt Z K E rectangulum ad H K quadratum, ita erit Z K E rectangulum ad E K V rectangulum. Quare & quadrato H K æquale erit rectangulum E K V. Ideoque

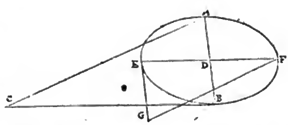
&, ex 9 huius, rhombo ex HK æquale erit parallelogrammum EV ipſi æquiangulum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Et hinc igitur etiam ſit manifeſtum, Rectam ZEI per centrum X, & contactum E ductam in expoſito, in antecedente, ABC cono ſcaleno eiuſdem DER ſectionis, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſis, diametrum eſſe principalem, ſiue ex generatione: eiuſdemque verticem punctum E ſectionis quoque eſſe verticem: & tranſuerſam diametrum principalem eſſe ZE: atque parametrum EG. Nec non & vtramque DI, HK, veluti & MI, NK eſſe ab eadem ſectione ad eandem ZEI diametrum ordinatim applicatam. Ideoque & ordinatim à ſectione ad quamcunque hyperboles, vel ellipſis, aſſumptam diametrum ordinatarum quadrata ſe habere inuicem, vt rectangula ſub contiguis interceptis eiuſdem diametri partibus ab vtroque tranſuerſę termino ſumptis inuicem. Atque etiam rhombos ex iiſdem ordinatis eſſe inuicem, vt parallelogramma æquiangula ſub iiſdem diametri partibus contenta inuicem.

THEOR. XXXIII. PROP. XXXIIII.

Si in ellipſi recta diametrum quampiam bifariam diuidens, eiuſque contiguæ parametro æquidiſtans ducatur vtrinque ſectione terminata; ſectionis erit diameter media inter præaſſumptas proportione. Et quæ in ipſius alterutro termino contigua ſectionis parameter ſumetur in continua omnium erit proportione.



Sit ellipſis AFB, cuius diameter AB, eiuſque contigua parameter BC. Secta autem AB bifariam in D, ducatur per D recta EDF ipſi BC parallela. Dico primùm rectam EDF ellipſeos AFB eſſe diametrum: & vt AB ad FE, ita eſſe FE ad BC. Quoniam enim AB diameter eſt ſectionis, & ſecta bifariam in D, erit D ſectionis centrum. Ideoque & ducta EDF eiuſdem ſectionis erit diameter, per 29 huius. Eſt autem EDF ipſi BC parametro æquidiſtans, ideoque & ad AB diametrum ordinatim

ordinatim applicata: igitur vt AB ad BC, ita, ex 12 huius, erit ADB rectangulum, hoc eſt AD quadratum, ad DF quadratum: & ita AB quadratum ad FE quadratum. Quare vt AB ad FE, ita erit FE ad BC.

Hoc præoſtenſo, ſi ipſi AB æquidiſtans ponatur EG, quæ ſe habeat ad EF, vt quadratun AD ad rectangulum EDF; erit EG ſectionis AFB parameter ipſi FE diametro contigua. Dico vt BC ad EF, ita eſſe EF ad AB, & ita AB ad EG.

Quoniam enim vt FE ad EG, ita eſt FDE rectangulum, hoc eſt ED quadratum, ad DA quadratum: & ita EF quadratum ad AB quadratum: erit vt EF ad AB, ita AB ad EG. Sed iam vt EF ad AB, ita oſtenſum eſt eſſe BC ad EF: igitur vt BC ad EF, ita erit EF ad AB: & ita AB ad EG. Quod erat demonſtrandum.

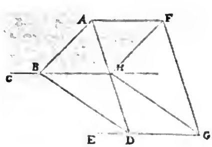
COROLL.

Hinc fit manifeſtum, Alterutra ellipſeos figura, aut ABC, aut FEG, data alteram fore notam: ideoque &, quoniam altera alteri ſimilis eſt, proportionalis ſcilicet lateribus, & æquiangula, vtramque propoſitæ ſectionis ſpeciem determinare. Quare ſi alterutra data propoſito minùs conueniens in ſequentibus reputetur, altera inuentu facilis erit, & in promptu, quæ propoſito ſatisfaciat, mutata tantùm operationis methodo, at inuariata rei propoſitæ natura.

LEMMA II. PROP. XXXV.

Si communes binorum planorum ſe inuicem ſecantium cum aliquo plano ſectiones æquidiſtantes fuerint inuicem; erit & ijſdem æquidiſtans communis amborum eorumdem planorum ſectio.

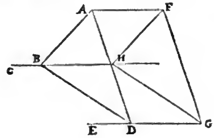
Sint binorum ABC, ADE planorum cum plano per CBD communes ſectiones BH, DE æquidiſtantes inuicem: & ſit AF communis amborum ABC, ADE planorum ſectio. Dico AF vtrique BH & DE æquidiſtantem eſſe.



Sumpto enim in AF quolibet puncto F, ducatur ad DE ipſi AD æquidiſtans FG: itemque ad BH ipſi DB æquidiſtans GH: iungaturque FH. Quoniam igitur æquidiſtant FG, GH ipſis AD, DB: erit planum per FGH plano per ADB æquidiſtans. Eſt autem FH & in plano per ABH, & in plano per FGH, ideoque &

Digitized by Google

communis amborum ſectio: ſimiliter & AB communis eſt planorum ABD & ABH ſectio: æquidiſtantes igitur erunt planorum ABD, FHG inuicem æquidiſtantium cum plano ABH communes AB, FH ſectiones. Quare & triangulum FHG triangulo ABD ſimile erit: & propter æquales HG, BD etiam æquale. Æqualis igitur erit FG ipſi AD: ideoque & æquidiſtabit AF ipſi

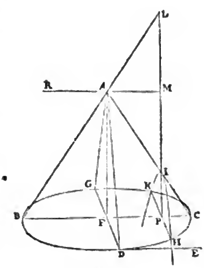


DE. Eſtque BH æquidiſtans DE: æquidiſtabit igitur & AF ipſi BH: quare vtrique BH & DE erit AF æquidiſtans. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXIIII. PROP. XXXVI.

Si circulum qui baſis eſt coni recta contingat linea in eodem exiſtens plano, & per tactum & coni verticem bina agantur plana, quorum alterum ſuperficiem coni ſecet ſecundum lineam à tactu ad baſis diametrum perpendicularem, alterum eandem contingat: & ſit à quocunque alio ſecanti æquidiſtante plano facta quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie hyperbola; contingens planum productum eiuſdem hyperbolæ diametro tranſuerſæ occurret in ſectionis centro.

Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BDC circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum BAC. Baſim autem BDC recta DE in eodem exiſtens plano contingat in D puncto, à quo ad BC ducatur perpendicularis DF, per quam & coni verticem A planum agatur coni ſuperficiem & baſim ſecans, facienſque, ex 1 huius, in ſuperficie & baſe coni ſectionem triangulum DAG: perque AD rectam & contingentem DE planum producatur coni ſuperficiem, per 14 huius, contingens. Et ſumpto in BC quolibet alio, præter F, puncto P, ducatur per P recta KPH parallela DG, per quam agatur planum plano per DAG æquidiſtans, ideoque & productæ BA occurrens in L, facienſque, per 5 huius, in ſuperficie coni ſectionem HIK

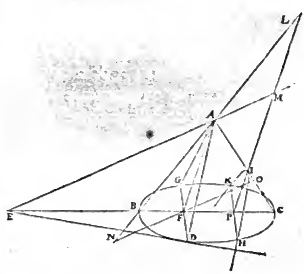


hyperbolam quamcunque, cuius vertex ſit I, tranſuerſa diameter LI, & intercepta IP. Planumque per ADE producatur. Dico productum hyperbolæ HIK tranſuerſæ diametro LI occurrere.

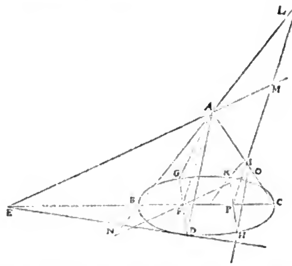
Quoniam enim eſt punctum A & in plano contingente ADE, & in plano trianguli per axem BAC: alterum alteri planum occurrit in A: ideoque & communis amborum ſectio erit recta linea quæ per A ducetur. Æquidiſtet autem primùm recta DE rectæ BC. Igitur quoniam DE eſt in plano baſis coni BDC, & in plano per ADE: erit amborum planorum communis ſectio recta DE. Similiter & BC amborum BAC, BDC planorum communis ſectio oſtendetur. Quare & communis amborum BAC, ADE planorum ſectio quæ per A ducetur, erit, ex antecedente, ipſis BC, DE æquidiſtans. Ducatur igitur, & ſit RA. Itaque quoniam RA æquidiſtat BC, erunt RA, BC in vno eodemque BAC plano. Et propter æquidiſtantia per ADG, IHK plana erunt amborum communes cum plano trianguli BAC ſectiones, ſcilicet FA, PL etiam æquidiſtantes inuicem. Occurritque RA rectæ FA: igitur & eadem RA ſectionis diametro PL occurret. Quare & eidem occurret planum per RADE productum. Sit itaque occurſus in M. Dico punctum M eſſe hyperbolæ HIK centrum.

Quoniam enim DE contingens æquidiſtat BC baſis coni diametro, & ad vtramque eſt perpendicularis DG: erit & DG circuli BDC diameter: ſectaque erit BC bifariam in F. Sed, propter æquidiſtantes PL, FA, vt BF ad FA, ita erit AM ad ML: & vt CF, ſiue BF, ad FA, ita erit AM ad MI: æqualis igitur erit MI ipſi ML. Eſtque LI tranſuerſa hyperbolæ HIK diameter: quare & eiuſdem centrum erit M. Planum igitur per ADE productum ſectionis ſiue hyperbolæ HIK tranſuerſæ diametro occurret in M eiuſdem centro. Quod 1. erat demonſtrandum.

Non æquidiſtet autem iam contingens DE baſis coni diametro BC, ſed eidem productæ occurrat producta in E: igitur quoniam puncta A, E in vtroque per ADE & per ABC ſunt plano: erit recta AE communis amborum ſectio. Et ei occurrit FA: quare & eidem occurret PL æquidiſtans FA, & in eodem exiſtens plano. Sit igitur rurſus occurſus



in M. Et ipſi E A M rectæ æquidiſtans ducatur per F recta N F O coincidens A B, vbi opus productæ, in N: & A C, in O. Itaque quoniam B C diameter eſt circuli, & contingens D E, perpendicularisque D F: erit, ex 19 huius, vt C F ad F B, ita C E ad E B: &, permutando, vt C F ad C E, hoc eſt vt F O ad E A, ita F B ad B E: hoc eſt ita F N ad E A. Æqualis igitur eſt F N ipſi F O. Et ſunt æquidiſtantes I L, A F: igitur vt N F ad F A, ita erit A M ad M L: & vt O F, ſiue N F, ad F A, ita erit A M ad M I: æqualis igitur erit rurſus M I ipſi M L. Quare & hoc caſu etiam ſectionis ſiue hyperbolæ H I K centrum erit M. Eſtque punctum M etiam in plano per A D E, quoniam eſt in communi ipſius cum plano trianguli B A C ſectione, nempè in recta E A producta: productum igitur per A D E planum baſis coni circumferentiam contingens, ſectionis ſiue hyperbolæ H I K tranſuerſæ diametro item occurret, eritque occurſus etiam & hoc caſu in M eiuſdem ſectionis centro. Quod 2. erat demonſtrandum.

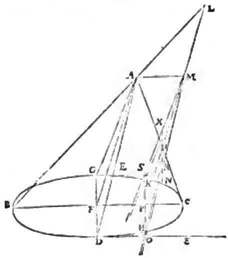


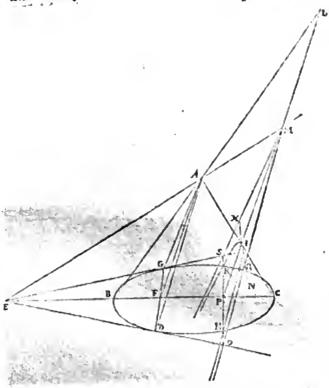
THEOR. XXXV. PROP. XXXVII.

Si circulum qui baſis eſt coni recta contingat linea in eodem exiſtens plano: & à tactu ad baſis diametrum recta ducatur perpendicularis, per quam & coni verticem planum producatur: & à quolibet alio ipſi æquidiſtante plano ſit facta quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie hyperbola: communiſque æquidiſtantis plani & baſis coni ſectio ad rectam contingentem producatur; quæ à centro hyperbolæ per communem earundem occurſum recta quantumcunque producetur linea cum ſectione, etiam quantumlibet producta, non coincidet. Vocabiturque ſectionis Aſymptotos.

Sit enim A B C conus, cuius vertex A, baſis B C circulus, quem in D, aut G, recta contingat linea E D, vel E G, in eodem exiſtens plano. Ductaque ad B C diametrum perpendiculari D F G, per ipſam & coni

& coni verticem A planum producatur conum ſecans, ſectionemque faciens triangulum D A G. Per ſumptum autem in B C diametro quodlibet aliud, præter F, punctum P planum agatur ipſi per D A G plano æquidiſtans, conumque ſecans, & in eius ſuperficie, per 5 huius, ſectionem faciens hyperbolam H I K, cuius ſit vertex I, tranſuerſa diameter I L, & centrum M. Communiſque plani per H I K & baſis coni ſectio ſit H K, quæ producta contingenti E D, aut E G, occurrat in O, vel S: iungaturque M O, aut M S, & producatur. Dico rectam M O, vel M S, quantumcunque productam ſectioni ſiue hyperbolæ H I K quamtumlibet etiam productæ non coincidere.





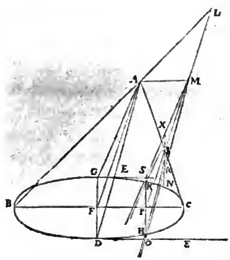
Quoniam enim contingit E D, vel E G, recta: planum per A D E, vel A G E, coni ſuperficiem continget, per 15 huius: eritque contactus in linea A D, vel A G. Sed, ex antecedente, planum per A D E, vel A G E, productum hyperboles H I K centro M occurrit: eſtque punctum O, vel S, in contingente E D, vel E G: puncta igitur A M D O, vel A M G S, in eodem erunt producto per A D E, vel A G E, plano coni ſuperficiem in linea A D, vel A G, contingente. Sunt autem æquidiſtantia bina per A D G & M O S plana: ideoque & amborum communes cum plano A M D O, vel A M G S, ſectiones M O, A D, vel M S, A G, æquidiſtantes inuicem: quamtumcunque igitur productæ M O, A D, vel M S, A G, inuicem non coincident. Planum autem A M D O, vel A M G S, in quo vtraque eſt M O, A D, vel M S, A G, coni ſuperficiem in ſola A D, vel A G recta contingit: non

Digitized by Google

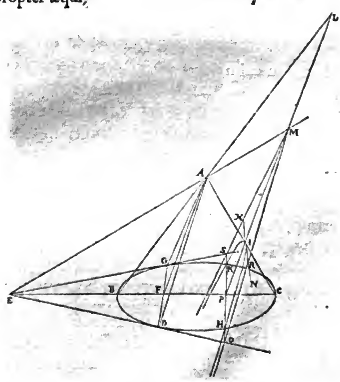
coincidet igitur recta M O, vel M S, quamtumcunque producta coni ſuperficiei. Quare nec ſectioni ſiue hyperbolæ H I K, quæ in ipſa ſuperficie eſt vnquam coincidet. Diceturque ſectionis Aſymptotos. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXVI. PROP. XXXVIII.

Iiſdem poſitis; quæ à vertice ſectionis ad vtramlibet aſymptoton recta ducetur linea communi plani ſecantis & baſis coni ſectioni æquidiſtans poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ ſectionis ad tranſuerſam diametrum factæ.



Maneant enim eadem quæ in antecedente. Et ab I vertice hyperbolæ H I K ducatur recta I R, aut I X, æquidiſtans H K, & alterutri M O, aut M S, aſymptoto occurrens in R, aut X. Sitque ſectionis parameter, ſiue coefficiens figuræ latus recta I N. Dico rectam I R, vel I X, poſſe quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ quæ lineis L I, I N continetur.



Quoniam enim, propter æquidiſtantia M O P, A D F plana, æquidiſtantes ſunt rectæ M O, A D: itemque A F, MP: & FD, PO: erit triangulum M P O triangulo A F D ſimile. Ideoque vt A F quadratum ad FD quadratum, ſiue B F C rectangulum, ita erit M P quadratum ad PO quadratum: & ita MI quadratum ad I R quadratum. Sed vt A F quadratum ad B F C rectangulum, ita, ex 14 huius, eſt L I ad I N, hoc

eſt ita L I quadratum, vel rhombus, ad rectangulum, vel parallelogrammum, L I N: & ita quadrans, quadratum ſcilicet, vel rhombus, M I, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, L I N: igitur vt M I quadratum, vel rhombus, ad quadrantem rectanguli, vel parallelogrammi, L I N, ita erit M I quadratum ad I R quadratum: & ita M I rhombus ad I R rhombum. Quadratum igitur, vel rhombus, I R æquabitur quadranti rectanguli, vel parallelogrammæ figuræ, L I N. Eademque ratione & quadrato, vel rhombo, I X æqualis demonſtrabitur quadrans eiuſdem rectanguli, vel parallelogrammæ figuræ, L I N: igitur recta I R, vel I X, poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ quæ lineis L I, I N continetur. Quod erat demonſtrandum.

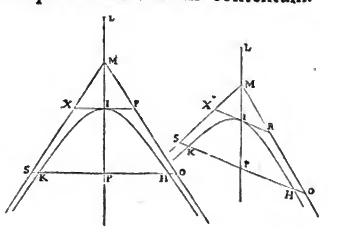
COROLL.

Igitur, Quoniam & recta H K ordinatim ad I P diametrum eſt applicata, ex 5 huius; quæ à vertice hyperbolæ ad vtramlibet aſymptoton recta ducetur ordinatim ad diametrum applicatis æquidiſtans poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ ad eandem diametrum factæ. Eiuſque quadratum ad quadratum interceptæ à centro, ſiue ad dimidiæ tranſuerſæ diametri quadratum, ſe habebit vt parameter ad eandem tranſuerſam diametrum: ſiue vt coefficiens figuræ latus ad tranſuerſum.

THEOR. XXXVII. PROP. XXXIX.

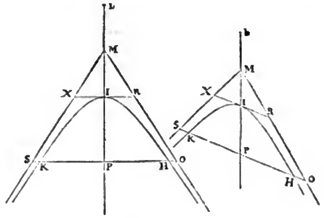
Si in hyperbola ducta recta linea bifariam ſecetur, & vtrinque producta cum vtraque aſymptoto conueniat; erit quadranti figuræ ad diametrum per bifariæ ſectionis punctum ductam factæ æquale vnumquodque rectangulum, aut parallelogrammum figuræ æquiangulum, ſub partibus ſectæ vtrinque à ſectione factis contentum.

Sit hyperbola H I K, cuius aſymptoti M S, M O, & centrum M. Ducta autem in ſectione recta K H, & bifariam ſecta in P, vtrinque producta cum aſymptotis M S, M O conueniat in S, & O:



iungaturque M P. Dico vnumquodque rectangulum, aut parallelo-

grammum, S K O, S H O quadranti figuræ ad M P diametrum factæ eſſe æquale.



Iuncta enim M P hyperbolam ſecans in I producatur in L, vt ſit M L æqualis M I. Sectionis igitur vertex erit I, & tranſuerſa diameter I L. Ducatur per L recta X I R æquidiſtans K H. Igitur quoniam M P ſectionis eſt diameter, & H K bifariam ſecta in P: erit, ex coroll. ad 11 huius, recta K H ad M P diametrum ordinatim applicata. Eique æquidiſtat X I R vtrinque aſymptoto terminata: vtraque igitur I X, I R, ex anteced. coroll. poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ ad I L tranſuerſam diametrum factæ. Quoniam autem vt M I quadratum ad I R quadratum, hoc eſt vt M P quadratum ad P S quadratum, ita eſt, ex coroll. antecedente, tranſuerſum figuræ ad L M P diametrum factæ latus ad coefficiens: & ita, ex coroll. ad 13 huius, rectangulum, ſiue parallelogrammum, L P I ad quadratum, ſiue rhombum, P K: erit vt totum M P quadratum, vel rhombus, ad totum P S quadratum, vel rhombum, ita ablatum L P I rectangulum, vel parallelogrammum, ad ablatum P K quadratum, vel rhombum. Quare & ita erit reliquum M I quadratum, vel rhombus, ad reliquum S K O rectangulum, vel parallelogrammum. Sed ita etiam erit M I quadratum, vel rhombus, ad I X quadratum, vel rhombum: hoc eſt, ex anteced. ad quadrantem figuræ ad L I tranſuerſam diametrum factæ: quadrato igitur, vel rhombo, I X, ſiue quadranti eiuſdem figuræ, æquale erit rectangulum, ſiue parallelogrammum, S K O. Eademque ratione & quadrato, vel rhombo, I R, ſiue eiuſdem figuræ quadranti, oſtendetur æquale rectangulum, vel parallelogrammum, S H O: quare conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Hinc fit euidens, Omnia bina rectangula, ſiue parallelogramma, ſub partibus ſingularum æquidiſtantium vtrinque à ſectione & aſymptoto ſumptis contenta eſſe inuicem æqualia. Quoniam ſingula omnia eidem quadranti figuræ ad diametrum, quæ æquidiſtantes bifariam diuidit, factæ oſtenſa ſunt æqualia.

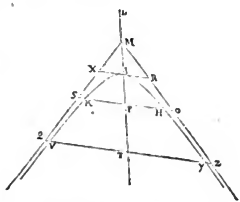
COROLL. II.

COROLL. II.

Atque etiam hinc ſequitur neceſſariò, Cuiuſcunque rectæ intra aſymptotos ductæ portiones vtrinque ſectione & aſymptoto interceptas eſſe inuicem æquales.

THEOR. XXXVIII. PROP. XL.

Hyperbola & aſymptoti propiùs ſemper ad ſe ipſas accedent quo longiùs producentur, & ad interuallum tandem peruenient dato quolibet interuallo minus.

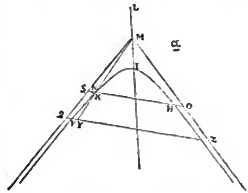


Sit, vt in antecedente, hyperbola HIK, cuius aſymptoti MS, MO, diameter MP, ad quam ordinatim ſit applicata KH vtrinque producta, & aſymptotis terminata in S, & O. Sumpto autem in diametro MP quantumlibet producta quolibet puncto T, ducatur in ſectione recta VTY æquidiſtans KH, & vtrinque producta aſymptotis occurrat in Q, & Z. Dico punctum V ad rectam MS productam propiùs accedere, quam punctum K.

Sit enim tranſuerſa diameter LI: & ducta per I verticem recta XIR æquidiſtans KH. Igitur, quoniam maior eſt LT quàm LP, & maior IT quàm IP: erit rectangulum LTI maius rectangulo LPI. Sed vt rectangulum LTI ad rectangulum LPI, ita eſt, ex 8 huius, quadratum TV ad quadratum PK: maior igitur erit & TV quàm PK. Eſt autem & TZ maior quàm PO: quoniam & MT maior eſt quàm MP: igitur & VZ maior erit quàm KO. Sed, ex antecedente, rectangulum, vel parallelogrammum, QVZ rectangulo, ſiue parallelogrammo æquiangulo, SKO eſt æquale: quoniam & vtrumque quadrato, vel rhombo IR, vel IX, oſtenſum eſt æquale: ideoque vt VZ ad KO, ita eſt SK ad QV: maior igitur erit SK quàm QV. Et eſt angulus KSM angulo VQM æqualis: punctum igitur V propiùs accedit ad rectam MS productam quàm punctum K. Eademque ratione & punctum Y ad MO productam propiùs accedere oſtendetur quàm punctum H. Conſtat igitur hyperbolam HIK, & vtramlibet MS, aut MO, aſymptoton productas propiùs ſemper ad ſe ipſas accedere. Dico inſuper & ad interuallum quolibet dato interuallo minus tandem peruenire.

Sit enim datum quodcunque interuallum recta α. Siquidem KS

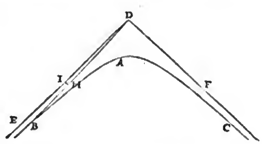
minor eſt quàm recta α: iam conſtat propoſitum. Sin autem æqualis ſit, aut maior: ſumatur in KS recta NS maior quàm α: vel etiam ipſi æqualis. Ductaque MK in Y, vt ſit MK ad MY, veluti eſt NS ad SK: ducatur per Y recta QYZ æquidiſtans KH, vtrinque aſymptoto terminata in Q, & Z, & à ſectione diuiſa in V. Rectangulum igitur, aut parallelogrammum, QVZ rectangulo, aut parallelogrammo æquiangulo, SKO eſt æquale, ex antecedente: ideoque vt VZ ad KO, ita erit KS ad VQ. Maior autem eſt VZ quàm YZ: quare & maior erit ratio VZ ad KO, quàm YZ ad KO. Sed vt YZ ad KO, ita eſt MY ad MK: hoc eſt ita KS ad SN: igitur maior erit ratio VZ ad KO, hoc eſt KS ad VQ, quàm KS ad SN. Quare & minor erit VQ quàm NS. Punctum igitur V propiùs accedet ad aſymptoton MQ, quàm ſit interuallum α. Quare & ſectio, ſiue hyperbola HIK producta in V propiùs accedit ad productam MS aſymptoton, quàm ſit idem datum α interuallum. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXXIX. PROP. XLI.

Si angulum aſymptotis contentum recta quæpiam diuidat linea; producta interceptæ ſectioni tandem occurret.

Sit hyperbola BAC, cuius aſymptoti DE, DF. Angulum autem EDF recta diuidat linea quæcunque DG. Dico rectam DG productam ſectioni, ſiue hyperbolæ, BAC tandem occurrere.



Sumpto enim in DG quolibet puncto H, ductaque ad DE perpendiculari HI: oſtendetur, vt in antecedente, ſectionem BAC & aſymptoton DE propiùs ad ſe inuicem accedere, quàm ſit interuallum HI. Quare producta BAC ſectio rectæ DG productæ priùs occurrat omninò neceſſe eſt. Occurrit igitur & recta DG ſectioni, ſiue hyperbolæ BAC. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc, & ex demonſtratis in 29 huius patet, Rectam DG hyperbolæ BAC vnam eſſe è diametris.

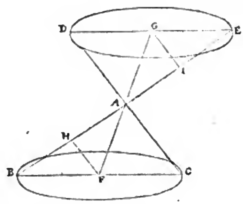
Digitized by Google

MONITVM.

Sed & , vt quæcunque hactenus de ſingularibus hyperbolis in ſingularibus conis factis ſunt propoſita & demonſtrata , etiam oppoſitis ſectionibus, ſiue hyperbolis , in binis oppoſitis conis factis conuenire , & vtriuſque communia eſſe probemus : hæc inſuper de ipſis proponemus.

THEOR. XL. PROP. XLII.

Si coni ad verticem exiſtentes plano per axem ſecentur; erunt facta triangula ad verticem poſita ſimilia , & eorum baſes æquidiſtantes inuicem.



Sint bini oppoſiti coni A B C, A D E plano per axem ſecti faciente bina triangula B A C , D A E. Dico triangulum D A E triangulo B A C eſſe ſimile : & baſim D E baſi B C eſſe æquidiſtantem.

Siquidem enim vtrumque per axem triangulum iſoſceles eſt : propter æquales ad communem verticem angulos: iam conſtat propoſitum.

Si ſecus autem: quoniam oppoſiti ſunt ABC, ADE coni: erunt eorum axes in directum, ex definit. Et ſunt ambo BAC, DAE triangula per axem : quare in vtraque BC, DE centrum erit circuli qui baſis eſt coni. Secta igitur BC bifariam in F , erit F centrum : ductaque FA , & producta, axis erit communis , occurrens DE diametro in centro G. Quare & DE ſecta erit bifariam in G. Ducatur FH alterutri AB aut AC æquidiſtans: & ipſi FH parallela agatur GI. Quoniam igitur vt BF ad FC, ita eſt EG ad GD: & ita BH ad HA: & EI ad IA: & vt HA ad HF, ita eſt IA ad IG: ex æquali erit vt BH ad HF, hoc eſt vt BA ad AC, ita EI ad IG: hoc eſt ita EA ad AD. Eſtque BAC angulo æqualis verticalis EAD angulus: quare triangulum DAE triangulo BAC ſimile erit : eritque DEA angulus alterno ABC angulo æqualis. Quare & recta DE rectæ BC parallela erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

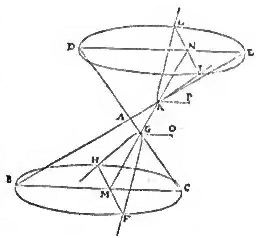
Hinc ſatis patet, Quoniam triangulorum per axem baſes ſunt communes ipſorum cum oppoſitis conorum baſibus

ſectiones: & omnia per axem oppoſita triangula oppoſitas baſes habent parallelas: binos quoſlibet ad verticem poſitos conos oppoſitas baſes habere inuicem æquidiſtantes.

THEOR. XLI. PROP. XLIII.

Si coni ad verticem exiſtentes plano ſecentur non per verticem; erunt factæ in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitæ ſectiones hyperbolæ, quarum communis erit tranſuerſa diameter: & vnius parameter alterius parametro æqualis erit & æquidiſtans.

Sint oppoſiti coni A B C, A D E, quorum baſes circuli B C, D E, & communis vertex A, qui plano non per verticem A tranſeunte ſecentur: & ſint factæ in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitæ ſectiones F G H, I K L. Dico, primùm, ſectiones FGH, I K L eſſe hyperbolas, quarum communis ſit tranſuerſa diameter G K.



Sint enim plani per F G I L H & oppoſitarum baſium communes ſectiones F H, I L; erunt F H, I L æquidiſtantes inuicem: quoniam & ipſæ baſes B C, D E, ex anteced. coroll. ſunt æquidiſtantes inuicem. Secetur itaque vterque A B C, A D E conus plano per axem quod ſectiones in oppoſitis baſibus faciat B E, D E ipſis F H, I L perpendiculares: communiſque plani per axem, & plani per F G I L H ſectio ſit recta M N, quæ ſectionibus occurrat in G, & K: & ipſis F H, I L in M, & N. Quoniam igitur vterque A B C, A D E conus plano per axem ſectus faciente bina B A C, D A E triangula, rurſus plano per M N vtrique laterum trianguli per axem vltra verticem occurrente in G, & K ſecatur ſecundum lineam ad baſis diametrum perpendicularem: erit vtraque facta in vtriuſque coni ſuperficie ſectio, per 5 huius, hyperbola, cuius communis erit tranſuerſa diameter G K.

Hiſque poſitis: ſit G O hyperbolæ F G H parameter ipſi G K tranſuerſæ diametro contigua: & hyperbolæ I K L eidem G K contigua parameter ſit K P. Dico inſuper & rectam K P æqualem eſſe & æquidiſtantem G O.

Cum enim ſit vt B M ad M K, ita E N ad N K: & vt C M ad M G, ita D N ad N G: erit, componendo, vt rectangulum B M C, hoc eſt quadratum F M, ad rectangulum K M G, ita rectangulum

E N L,

END, hoc eſt quadratum IN, ad rectangulum GNK. Sed vt quadratum FM ad rectangulum KMG, ita eſt ſectionis parameter GO ad tranſuerſam diametrum GK, ex coroll. 2. ad 12 huius: & vt quadratum IN ad rectangulum GNK, ita eſt parameter KP ad tranſuerſam diametrum KG. Igitur vt GO ad GK, ita erit & KP ad KG. Hyperbolæ igitur IKL parameter KP hyperbolæ FGH parametro GO erit æqualis. Intelligatur iam recta GO ſectionem FGH in G contingere in eodem exiſtens plano: & recta KP etiam ſectionem IKL contingat in K, & in eodem ſit plano. Igitur quoniam vtraque FH, IL perpendicularis eſt ad circuli diametrum: erit & vtraque bifariam ſecta, FH quidem in M, & IL in N. Quare & vtraque, ex coroll. ad 11 huius, ad communem MN diametrum ordinatim erit applicata. Vtraque autem GO, KP ſectionem in vertice contingit: ideoque & GO æquidiſtans eſt FH, & KP æquidiſtans IL, ex corollarijs ad 17 huius: ſuntque æquidiſtantes FH, IL: igitur & KP erit æquidiſtans GO. Quare & oppoſitarum FGH, IKL ſectionum communis erit GK tranſuerſa diameter: & vnius parameter KP alterius parametro GO æqualis erit & æquidiſtans. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Hinc igitur ſit euidens, Rectas quæ ab oppoſitis ſectionibus ad communem quamcunque diametrum ordinatim applicantur, atque etiam quæ in terminis communis tranſuerſæ diametri oppoſitas ſectiones contingunt, inuicem eſſe æquidiſtantes.

COROLL. II.

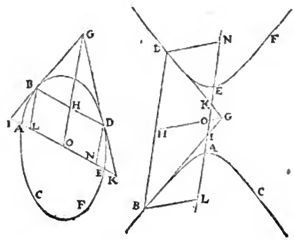
Quin etiam ex his ſequitur, Binarum oppoſitarum ſectionum ſiue hyperbolarum idem eſſe ſiue commune centrum, & communes omnes tranſuerſas diametros, ideoque & axem communem. Inſuper, & communes eſſe aſymptotos, communeſque vmbilicos. Quoniam & ad communem tranſuerſum axem factæ vtriuſque figuræ ſimiles ſunt, & æquales: earumque quadrantes æquales: & quadranti primariæ figuræ æquale rectangulum ad communem tranſuerſum axem applicatum æquali exceſſu excedit vtrinque: ſuntque diametri portiones vtrinque à centro & vertice ad vmbilicum interceptæ æquales.

Digitized by Google

THEOR. XLII. PROP. XLIIII.

Si ellipſim, aut oppoſitas ſectiones binæ rectæ contingant inuicem occurrentes; quæ ab occurſu ad medium lineæ tactus coniungentis recta ducetur linea ſectionum erit diameter, diametro, quæ rectæ tactus coniungenti æquidiſtat, coniugata.

Sint ellipſis, vel oppoſitæ ſectiones B A, D E, quas contingant in B, & D rectæ B G, D G inuicem occurrentes in G. Iunctaque B D, & bifariam ſecta in H, iungatur G H. Sit autem A E tranſuerſa ſectionum diameter ipſi B D æquidiſtans. Dico rectam G H ſectionum eſſe diametrum ipſi A E tranſuerſæ diametro coniugatam.



Sint enim puncta K, I in quibus contingentes B G, D G diametro A E occurrunt: & punctum O in quo G H ipſam A E ſecat. Productaque A E vtrinque, vbi opus, ad ipſam ordinatim ſint applicatæ B L, D N. Æquidiſtat igitur D N ipſi B L, ex anteced. coroll. 1. ideoque & parallelogrammum erit D L: rectaque D N ipſi B L erit æqualis. Sed propter communem A E tranſuerſam diametrum, & æquales vtriuſque ſectionis contiguas parametros, ex anteced. vt E L A rectangulum ad B L quadratum, ita erit A N E rectangulum ad D N quadratum: & permutatim: rectangulum igitur A N E rectangulo E L A æquale erit. Quare vt N A ad A L, ita erit L E ad E N: &, in ellipſi diuidendo, in oppoſitis verò ſectionibus componendo, vt N L ad L A, ita erit L N ad N E. Æqualis igitur erit E N ipſi A L: atque etiam A N ipſi E L. Quoniam autem, propter ordinatim applicatas B L, D N, & contingentes B G, D G diametro A E occurrentes in I, & K, vt E L ad L A, ita eſt, ex 19 huius, E I ad I A: & vt A N ad N E, ita eſt A K ad K E: erit vt E I ad I A, ita A K ad K E, & diuidendo, vel componendo, vt E A ad A I, ita erit A E ad E K. Æqualis igitur erit & E K ipſi A I. Sed propter æquidiſtantes B D, I K, & æquales B H, H D, etiam & recta K O rectæ O I eſt æqualis: igitur & recta E O rectæ O H etiam æqualis erit. Ideoque & O ſectionum centrum erit. Quare, ex definit. recta G O H ellipſeos, ſiue

oppoſitarum B A, D E ſectionum erit diameter ipſi tranſuerſæ diametro A E coniugata. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

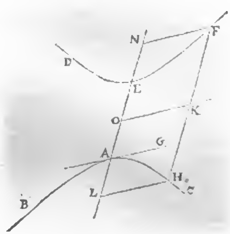
Itaque, Si recta quæpiam, vt B D, ellipſi, aut oppoſitis ſectionibus vtrinque occurrens bifariam ſecetur; quæ à centro ad eius medium ducetur ſectionum diameter erit, tranſuerſæ diametro, quæ rectæ bifariam ſectæ æquidiſtat, coniugata. Et in ellipſi, ex 34 huius, & ex definit. ſecunda erit diameter.

COROLL. II.

Conſtat inſuper, Rectangulum ſub partibus rectæ ab occurſu contingentium ad medium lineæ tactus coniungentis ductæ à centro factis quadranti figuræ ad diametrum tactus coniungenti æquidiſtantem factæ eſſe æquale. *Hoc enim in 27 huius iam demonſtratum eſt.*

THEOR. XLIII. PROP. XLV.

Si oppoſitarum ſectionum alteram recta contingat linea; quæ per centrum eidem æquidiſtans ducetur, ſectionum communis erit diameter communi per tactum ductæ diametro coniugata.



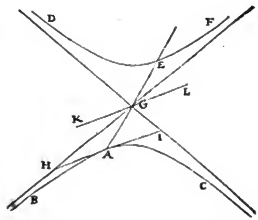
Sint oppoſitæ ſectiones B A C, D E F, quarum commune centrum ſit O, communiſque diameter A O E. Contingat autem ſectionem BAC in A recta A G; cui æquidiſtans ducatur O K. Dico O K oppoſitarum ſectionum communem eſſe diametrum diametro A O E coniugatam.

A quolibet enim in recta O K puncto K ducta ſit ipſi A O E diametro æquidiſtans F K H vtrinque oppoſitæ ſectioni occurrens in F, & H. Ordinatimque ad A E diametrum ſint applicatæ F N, H L. Oſtendetur igitur, vt in antecedente, recta F N rectæ H L æquidiſtans & æqualis: rectaque E N æqualis A L. Quare & O N æqualis erit O L: ideoque & K F etiam æqualis erit K H. Eſtque vtrumque F & H punctum in ſectione: igitur recta O K æquidiſtantes A E, H F vtrinque ſectione termi-

natas bifariam ſecans vtriuſque B A C, D E F ſectionis erit diameter ipſi A E tranſuerſæ diametro coniugata. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XLIIII. Prop. XLVI.

Si oppoſitarum ſectionum alteram recta contingat linea vtrinque aſymptotis terminata; quæ eidem æqualis & æquidiſtans per centrum ducetur ab ipſo bifariam ſecta, ſectionum communis erit ſecunda diameter.



Sint oppoſitæ ſectiones B A C, D E F quarum commune centrum ſit G: aſymptoti H G, G I. Contingat autem B A C ſectionem in A recta H A I vtrinque aſymptotis terminata in H, & I: eique æqualis & æquidiſtans ducatur K G L bifariam ſecta in G. Dico rectam K G L oppoſitarum B A C, D E F ſectionum ſecundam eſſe diametrum.

Ducatur per A & centrum G diameter A G E. Igitur quoniam contingit A I, & aſymptoto terminatur in I: quadranti figuræ ad A E tranſuerſam diametrum factæ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex A I: ex coroll. ad 38 huius. Eademque ratione & eidem quadranti figuræ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex A H. Igitur & figuræ ad A E tranſuerſam diametrum factæ æquabitur quadratum, vel rhombus, ex H I, hoc eſt ex K L. Quare & vtraque H I, & K L media proportionalis erit inter eiuſdem figuræ latera. Tranſit autem K L per centrum G, & ab ipſo bifariam ſecatur: atque ordinatim ad A E diametrum applicatis eſt æquidiſtans, quoniam & rectæ A I ſectionem in vertice contingenti æquidiſtat: igitur recta K L, ex definit. oppoſitarum B A C, D A E ſectionum ſecunda diameter erit. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XLV. Prop. XLVII.

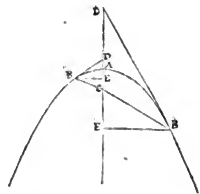
Si parabolem recta contingat linea cum axe producto conueniens; quæ à tactu ad ſectionis vmbilicum recta ducetur, æqualis erit axis portioni vmbilico & recta ſectionem in eodem præaſſumpto puncto contingente interceptæ.

Sit parabola A B, cuius vertex A, vmbilicus C, ideoque & axis A C.

Digitized by Google

A C. Sectionem autem contingat in B recta B D cum axe producto conueniens in D. Iungaturque B C. Dico rectam B C rectæ C D eſſe æqualem.

Ordinatim enim ad axem applicata ſit B E: erit, ex 18 huius, A E æqualis A D: eritque B E quadratum rectangulo ſub A E & recta parametro, hoc eſt ſub D A & quadrupla A C æquale. Eſt autem & C B quadratum quadratis E B & E C æquale: igitur C B quadratum æquale erit quadruplo D A C rectangulo, vna cum quadrato C E. Quoniam autem quadratum D C æquale eſt quadratis D A & A C, vna cum duplo D A C rectangulo: quorum quadratum D A, hoc eſt A E, æquale eſt quadratis A C, C E, vna cum



duplo A C E rectangulo: & duplum A C E rectangulum vna cum duplo A C quadrato æquale eſt duplo E A C, hoc eſt D A C, rectangulo: ſi quidem punctum E eſt in producta A C: at ſi puncta A, C interiacet; quadrato A C æqualia erunt A E & E C quadrata, vna cum duplo A E C rectangulo: quorum duplum A E C rectangulum vna cum duplo A E quadrato rurſus duplo E A C, hoc eſt D A C, rectangulo erit æquale: vtroque caſu erit & D C quadratum etiam quadrato C E, & quadruplo D A C rectangulo æquale. Ideoque & D C quadratum æquale erit B C quadrato. Recta igitur D C rectæ C B erit æqualis. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Hinc igitur fit manifeſtum, Si parabolam recta quęcunque contingat linea cum producto axe conueniens; rectam quę à tactu ad ſectionis vmbilicum ducetur angulum cum contingente facere ęqualem ei qui ab axe & eadem contingente continetur.

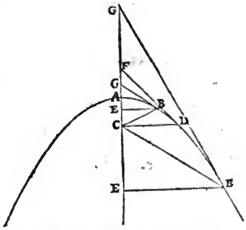
COROLL. II.

Itaque, Si parabolam recta quæcunque contingat linea vtrinque producta: & à tactu binæ educantur rectæ lineæ, altera ad vmbilicum, altera axi æquidiſtans; eductæ huiuſmodi lineæ æquales ad contingentem conſtituent angulos.

Digitized by Google

THEOR. XLVI. PROP. XLVIII.

In omni parabola, recta linea quæ ab vmbilico ad ſectionem educetur ordinatim ad axem applicata, interceptæ axis portionis erit dupla. Et quæ ab eodem vmbilico ad ſectionem aliter educetur, ęqualis erit eidem axis portioni vertice & vmbilico interceptæ, vnà cum eiuſdem axis portione inter verticem & ordinatim ab eductæ termino applicatam intercepta.



Sit parabola AB, cuius axis AC, vmbilicus C. Sit autem ad AC axem ordinatim applicata CD. Dico CD ipſius AB eſſe duplam.

Contingat enim ſectionem in D recta DF. Erit igitur AF æqualis AC. Sed ſunt æquales, ex anteced. rectæ CD, CF: igitur & CD erit ipſius AC dupla. Quod erat 1. demonſtrandum.

Sit autem quomodocunque aliter educta CB: & ad axem ordinatim applicata ſit BE. Dico CB æqualem eſſe ipſis AC, AE ſimul ſumptis.

Contingat enim rurſus ſectionem in B recta BG: igitur & AG æqualis erit AE: & CB æqualis CG. Eſtque CG æqualis binis AG, hoc eſt AE, & AC rectis: quare & iiſdem binis AE, AC rectis æqualis erit BC. Quod 2 erat demonſtrandum.

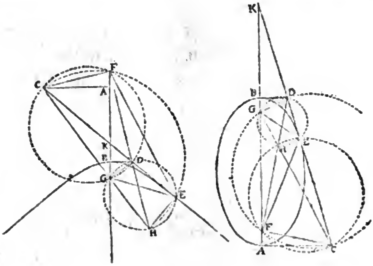
THEOR. XLVII. PROP. XLIX.

Si hyperbolem, aut ellipſim, recta contingat linea; quæ à tactu ad vtrumque ſectionis vmbilicum rectæ ducentur lineæ æquales ad contingentem angulos facient.

Sit hyperbola, vel ellipſis, EB, cuius axis tranſuerſus AB. Et quartæ parti figuræ ad axem AB factæ æquale ſit vnumquodque AGB, BFA rectangulum: hoc eſt ſint vtriuſque ſectionis vmbilici F, & G. Sectionem autem contingat in E recta EDC: iunganturque EF, EG. Dico angulum GED angulo FEC eſſe æqualem.

Ordinatim enim applicentur AC, BD contingenti EC occurrentes

in C, & D. Rectangulum igitur A C, B D, ex 26 huius, rectangulo A G B erit æquale. Quare vt C A ad A G, ita erit B G ad B D. Iunctis igitur C G, G D, propter vtrumque ad A & B angulum rectum, erit angulus B D G angulo A G C æqualis. Quare ambo ad G æquales erunt vni recto. Rectus igitur erit



& C G D angulus. Similiter quoniam, permutando, vt A C ad A F, ſiue B G, ita eſt A G, hoc eſt F B, ad B D: iunctis C F, F D, rectus etiam oſtendetur C F D angulus. Circulus igitur circa C D diametrum deſcriptus per puncta F, G tranſibit. Erecta autem perpendiculari E H quæ occurrat F D, productæ vbi opus, in H: erit, propter C F D angulum rectum, triangulum E D H triangulo F D C ſimile. Quare vt F D ad D C, ita erit E D ad D H. Sed, propter ſimilitudinem triangulorum F D C, hoc eſt A G C, & B D G, vt F D ad D C, ita eſt B D ad D G: igitur vt B D ad D G, ita erit E D ad D H: &, permutando, vt B D ad D E, ita erit G D ad D H. Propter angulum autem G D H externum angulo F C G interno æqualem, & vtrumque ad F & G rectum, vt G D ad D H, ita erit F C ad C G productam aut reſciſam in H: occurrit igitur vtraque F D, C G rectæ E H in H. Quare circa diametrum C H deſcriptus circulus per puncta F & E tranſibit. Eademque ratione & circa diametrum D H deſcriptus circulus per puncta G & E tranſibit. Erit igitur in circulo C F E H angulus C H F angulo F E C æqualis. Similiter & in circulo G D E H angulus G H D, hoc eſt C H F, angulo G E D æqualis erit. Angulus igitur G E D angulo F E C æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

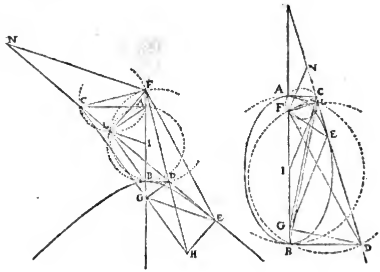
THEOR. XLVIII. PROP. L.

Si hyperbolem, aut ellipſim, recta contingat linea: & ab vtroque vmbilico ad tactum binæ inclinentur lineæ; quę à centro ad contingentem ducetur alterutri æquidiſtans, dimidio tranſuerſi axis æqualis erit.

Sint enim eadem quæ in antecedente: centrumque ſectionis ſit I.

Digitized by Google

Et alterutri G E aut F E æquidiſtans ducatur I L occurrens contingenti E C in L. Dico I L eſſe æqualem I B.



Iungantur enim F L, B L, A L: & per F ipſi I L æquidiſtans ducatur ad contingentem F N. Quoniam igitur angulus F E C æqualis eſt, ex antecedente, angulo GED: & æquidiſtat F N ipſi G E; erit & angulus F N E angulo F E N æqualis: ideoque & F N æqualis F E. Sunt autem F I, I G æquales: quoniam & A I, I B æquales ſunt, itemque A F, B G: & æquidiſtat I L ipſis G E, F N: æqualis igitur eſt N L ipſi L E: & ideò F L perpendicularis eſt ad L E. Quare circulus circa F C diametrum deſcriptus tranſibit per puncta L, A. Æqualis igitur erit F L A angulus angulo F C A. Sed ipſi F C A angulo oſtenſus eſt æqualis vterque D C G, D F G angulus: &, propter vtrumque F B D, F L D angulum rectum, circulus circa diametrum F D deſcriptus per puncta L, B tranſibit: ideoque & angulus D L B angulo D F B, ſiue D F G, æqualis erit: igitur & ipſi F C A angulo, hoc eſt angulo F L A, æqualis erit D L B angulus. Quare communi addito in hyperbola quidem angulo D L A, & in ellipſi B L F, erit angulus B L A angulo D L F æqualis. Sed eſt D L F angulus rectus: & rectus igitur erit angulus B L A. Quare circa diametrum A B circulus deſcriptus per punctum L tranſibit: eritque radius I L radio I B, hoc eſt dimidio A B axis tranſuerſi, æqualis. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XLIX. PROP. LI.

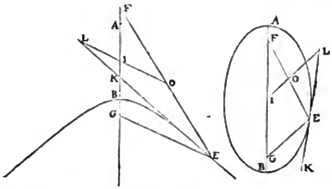
Si in hyperbola aut ellipſi ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum binę inclinentur rectę lineę; in hyperbola maior minorem quantitate tranſuerſi axis ſuperabit: & in ellipſi erunt ſimul tranſuerſo axi ęquales.

Sit hyperbola, vel ellipſis, B E, cuius axis tranſuerſus A B, vmbilici F, G. Sumpto autem quolibet in ſectione puncto E, agantur F E, G E: Dico in hyperbola rectam F E ſuperare G E quantitate axis A B: & in ellipſi ipſas F E, G E ſimul ipſi axi A B eſſe æquales.

Sit

Digitized by Google

Sit enim ſectionis centrum I. Et per E contingens ducatur E L, cui à centro I occurrat in L recta I L æquidiſtans G E: & producatur L I in O. Quoniam igitur, ex 49 huius, angulus G E K æqualis eſt angulo F E L, & ipſi G E æquidiſtat L O; erit O L E angulus angulo O E L æqualis: ideoque & recta O L ipſi O E æqualis.



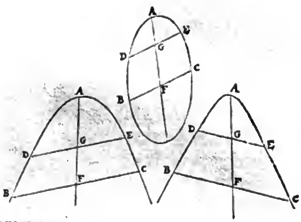
Sunt autem & I G, I F æquales: quare & O E ipſi O F æqualis erit. Ideoque & F E ipſius O L erit dupla. Quoniam autem, ex antecedente, recta I L dimidio axi tranſuerſo, hoc eſt I B, æqualis eſt: erit in hyperbola recta F E ipſarum I B, I O dupla. Sed ipſius I O dupla eſt G E: quare F E ipſi G E, & inſuper duplæ I B, hoc eſt axi A B, erit æqualis. Superat igitur F E rectam G E quantitate tranſuerſi axis A B. At in ellipſi cum ſit A B axis rectæ I A ſiue I L duplus, & G E recta dupla rectæ I O, atque E F dupla rectæ O L: erunt G E, E F ſimul rectæ I L, aut I A, duplæ: hoc eſt ipſi tranſuerſo axi A B æquales. Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA I. PROP. LII.

Data quacunque coni ſectione; eiuſdem diametrum inuenire.

Sit data quæcunque coni ſectio B A C: oportet eiuſdem diametrum inuenire.

Ducantur vtcunque in ſectione binæ rectæ BC, DE quæ bifariam ſecentur in F & G. Iunctaque FG ſectioni occurrat in A. Dico rectam A G F propoſitæ B A C ſectionis eſſe diametrum.



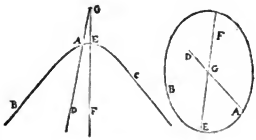
Quoniam enim æquidiſtant D E, B C: eaſque bifariam diuidit in G & F recta A G F: erit, ex definit. recta A G F propoſitæ B A C ſectionis diameter problemati ſatisfaciens.

Digitized by Google

PROBL. II. PROP. LIII.

Data quacunque hyperbola, aut ellipſi; eiuſdem centrum inuenire.

Sit data quæcunque hyperbola, aut ellipſis, BAC: oportet eiuſdem centrum inuenire.



Inueniantur, per antecedentem, binæ quæcunque eiuſdem diametri AD, EF quæ, productæ vbi opus, conueniant in G. Dico punctum G eſſe propoſitæ BAC ſectionis centrum. Hoc autem patet ex definit.

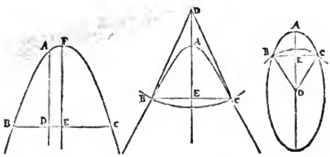
COROLL.

Itaque, Si vnicuique AG, EG productæ æqualis recta in continuum apponatur; erit vtraque ſic producta ſectionis tranſuerſa diameter, ex definitione centri.

PROBL. III. PROP. LIIII.

Data quacunque coni ſectione; eiuſdem axem inuenire.

Sit data quæcunque coni ſectio BAC: oportet eiuſdem axem inuenire.



Sit primùm propoſita coni ſectio parabola. Ducatur igitur, per 52 huius, diameter quæcunque AD: cui ad rectos angulos in ſectione ducatur recta BDC. Si quidem BC bifariam ſecta eſt in D; erit AD axis quæſitus. Sin autem, ſecetur BC bifariam in E: & per E agatur EF æquidiſtans AD, ſectionique occurrens in F. Dico EF propoſitæ BAC parabolæ axem eſſe.

Quoniam enim EF diametro AD æquidiſtat: erit EF, ex 28 huius, etiam diameter. Sed EF rectam BC in ſectione ductam bifariam ſecat, & ad rectos angulos: ex definit. igitur erit EF propoſitæ BAC parabolæ axis.

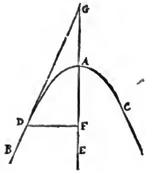
Digitized by Google

Sit autem propoſita B A C ſectio hyperbola, vel ellipſis. Inueniatur, per antecedentem, centrum D. Et centro D deſcripta circuli circumferentia ſectioni B A C occurrat in duobus B & C punctis: iunctaque B C, & biſariam ſecta in E, ducatur D E & producatur. Dico D E eſſe propoſitæ B A C hyperbolæ, aut ellipſis, axem.

Iungantur enim D B, D C. Quoniam igitur ſunt D B, D C æquales, & æquales B E, E C: erit ducta DE ad BC perpendicularis. Tranſitque DE per centrum D: quare, ex 29 huius, diameter erit DE. Sed & rectam B C in ſectione ductam biſariam & ad angulos rectos diuidit: igitur, ex defin. ſectionis axis erit D E. Sunt igitur inuenti axes. Quod facere oportebat.

PROBL. LIIII. PROP. LV.

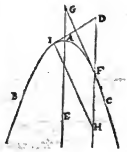
Data quacunque coni ſectione, & puncto non intra ſectionem dato; ab eodem rectam lineam ducere quæ ſectionem contingat.



Sit propoſita quæcunque coni ſectio B A C: datumque punctum D, vt præſcriptum eſt: oportet per D rectam lineam ducere quæ ſectionem B A C contingat.

Sit primùm BAC ſectio parabola: & punctum D datum in ipſa ſectionis linea. Exhibeaturque, per antecedentem, parabolæ BAC axis A E, ſi quidem punctum D vertici A coincidit; erecta indidem perpendicularis ſectionem continget, ex 17 huius. Sin autem: à dato puncto D ducatur ad axem AE perpendicularis D F: productaque F A vltra ſectionem in G, vt ſit A G æqualis A F: ducatur D G. Dico rectam D G ſectionem ſiue parabolam B A C contingere in D. Hoc enim in 20 huius iam oſtenſum eſt.

Idemque ſequetur ſi dato puncto G in axe, & ſumpta A F æquali A G, erigatur perpendicularis F D quæ ſectioni occurrat in D. Namque & G D ſectionem in eodem D puncto continget: ex eadem 20 huius, & ad eam coroll.

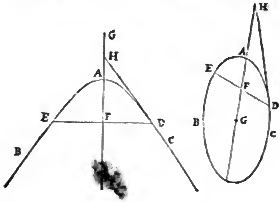


Non ſit autem iam datum D punctum in ſectione, neque in axe, ſed in quocunque loco extra ſectionem. Ducatur per D axi A E æquidiſtans D H, ſectioni occurrens in F: atque à puncto F in ſectione dato ducatur, vt iam dictum eſt, contingens F G: ſumptaque F H æquali F D, ducatur ipſi F G parallela H I ſectioni occurrens in I: iungaturque D I. Dico rectam D I ſectionem B A C contingere in I.

Quoniam enim D F H axi A E æquidiſtat: diameter erit ſectionis;

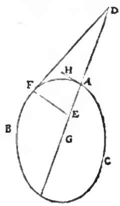
Digitized by Google

ex coroll. ad 28 huius: eiuſque vertex erit F. Eſt autem HI contingenti FG æquidiſtans: ordinatim igitur ad FH diametrum applicata eſt IH, ex coroll. 2 ad 17 huius, & eſt DF æqualis FH: igitur, ex 20 huius, recta DI ſectionem, ſiue parabolam BAC continget in I.



Sit rurſus propoſita BAC ſectio hyperbole, aut ellipſis: & datum punctum D primùm in ſectione. Ducatur per D recta quæcunque in ſectione DE, & bifariam ſecetur in F. Inuento autem centro G, per 53 huius, ducatur diameter GF ſectioni occurrens in A: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum FGH: ducaturque DH. Dico rectam DH ſectionem BAC contingere in D. Hoc autem fit manifeſtum, ex conuerſa 23 huius, & per generale conſectarium ad 27.

Similiter & dato puncto H in vtriuſque ſectionis diametro, ſiue in axe, quod in hyperbola ſit intra centrum ſectionis & verticem, & in ellipſi extra ipſam ſectionem: ſi fiat quadrato interceptæ à centro, hoc eſt dimidiæ tranſuerſæ diametri, ſiue axis, vt GA, æquale rectangulum ſub interiecta eiuſdem parte centro & puncto dato, vt GH, & alia recta quæ ſit GF: & ipſi GF perpendicularis excitetur FD, ſi quidem GF axis eſt: ſin autem, ducta per A ſectionem contingente, vt dictum eſt, eidem æquidiſtans ducatur FD ſectioni vtroque caſu occurrens in D puncto; ducta recta HD ſectionem BAC in eodem D puncto continget. Hoc enim &, ex eadem 23 huius, fit manifeſtum.



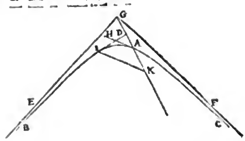
Sit iam data BAC ſectio ellipſis, & datum D punctum vbilibet extra ſectionem. Sumatur centrum G, ducaturque DG ſectioni occurrens in A. Inuentoque ſectionis axe, à puncto A in ſectione dato ducatur AH ipſam contingens, vt iam dictum eſt: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum DGE: & per E agatur contingenti AH parallela EF ſectioni occurrens in F: iungaturque DF. Dico rectam DF ſectionem BAC contingere in F. Hoc enim etiam ex conuerſa 23 huius manifeſto ſequitur.

Sit rurſus propoſita BAC ſectio hyperbola, cuius centrum ſit G: aſymptoti autem GE, GF. Datumque punctum D primum intra angulum EGF. Ducatur ad ſectionem per D recta GDA, producaturque intra ſectionem in K, vt quadrato GA æquale ſit rectangulum DGK. Inuento autem axe, & à puncto A in ſectione dato

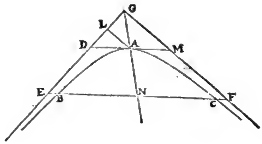
ducta

Digitized by Google

ducta contingente A H: eidem per K æquidiſtans ducatur K L ſectioni occurrens in I: ducaturque D I. Dico rurſus rectam D I ſectionem B A C contingere in I. Cuius demonſtratio antecedenti eadem erit.

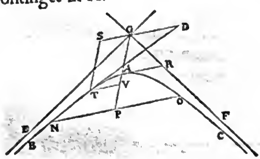


Sit iam datum punctum D in vna aſymptoto. Sectaque D G bifariam in L, ducatur L A alteri aſymptoto G F æquidiſtans occurrenſque ſectioni in A: iungaturque D A. Dico rectam D A ſectionem B A C contingere in A.



Producatur enim D A in M, & ipſi D M æquidiſtans ponatur E F ſectioni occurrens in B, & C: ducaturque G A, & producatur in N. Igitur quoniam L G æqualis eſt D L, erit & A M æqualis D A: atque etiam N F æqualis E N. Sed, ex coroll. 2 ad 39 huius, & C F æqualis eſt E B: quare & N C æqualis erit B N. Secta igitur erit B C bifariam in N: ideoque & diameter erit G A N, & ad ipſam ordinatim applicata B C: ex coroll. ad 11 huius. Eſt autem & punctum A ſectionis vertex, ex definit. & D A M æquidiſtans eſt B C: recta igitur D A, ex 17 huius, ſectionem B A C continget in A.

Sit denique datum D punctum in angulo deinceps ei qui ab aſymptotis continetur. Ducatur igitur per centrum G recta D G, & producatur. Sumpto autem in ſectione quolibet puncto N, ducatur in eadem recta N O æquidiſtans D G, & bifariam ſecetur in P: ductaque G P hyperbolem ſecante in A, ducatur ipſi N O æquidiſtans A R aſymptoto occurrens in R: quadratoque A R æquale ponatur rectangulum D G S: & per S ipſi G P æquidiſtans ponatur S T ſectioni occurrens in T: iungaturque D T. Dico rectam D T ſectionem B A C contingere in T.

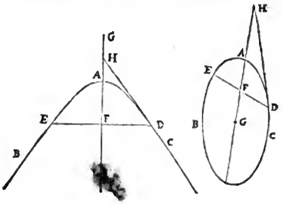


A puncto enim T ad G P ducatur ipſi N O æquidiſtans T V. Quoniam igitur N O bifariam eſt ſecta in P: erit per centrum G ducta G P ſectionis diameter, & ad eam ordinatim applicata NP, per 11 huius, & ad eam coroll. Secat autem G P diameter hyperbolem in A:

Digitized by Google

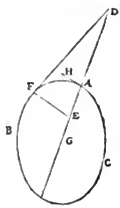
ex coroll. ad 28 huius: eiuſque vertex erit F. Eſt autem HI contingenti FG æquidiſtans: ordinatim igitur ad FH diametrum applicata eſt IH, ex coroll. 2 ad 17 huius, & eſt DF æqualis FH: igitur, ex 20 huius, recta DI ſectionem, ſiue parabolam BAC continget in I.

Sit rurſus propoſita BAC ſectio hyperbole, aut ellipſis: & datum punctum D primùm in ſectione. Ducatur per D recta quæcunque in ſectione DE, & bifariam ſecetur in F. Inuento autem centro G, per 53 huius, ducatur diameter GF ſectioni occurrens in A: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum FGH: ducaturque DH. Dico rectam DH ſectionem BAC contingere in D. Hoc autem fit manifeſtum, ex conuerſa 23 huius, & per generale conſectarium ad 27.



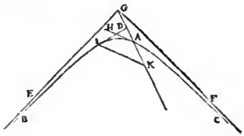
Similiter & dato puncto H in vtriuſque ſectionis diametro, ſiue in axe, quod in hyperbola ſit intra centrum ſectionis & verticem, & in ellipſi extra ipſam ſectionem: ſi fiat quadrato interceptæ à centro, hoc eſt dimidiæ tranſuerſæ diametri, ſiue axis, vt GA, æquale rectangulum ſub interiecta eiuſdem parte centro & puncto dato, vt GH, & alia recta quæ ſit GF: & ipſi GF perpendicularis excitetur FD, ſi quidem GF axis eſt: ſin autem, ducta per A ſectionem contingente, vt dictum eſt, eidem æquidiſtans ducatur FD ſectioni vtroque caſu occurrens in D puncto; ducta recta HD ſectionem BAC in eodem D puncto continget. Hoc enim &, ex eadem 23 huius, fit manifeſtum.

Sit iam data BAC ſectio ellipſis, & datum D punctum vbilibet extra ſectionem. Sumatur centrum G, ducaturque DG ſectioni occurrens in A. Inuentoque ſectionis axe, à puncto A in ſectione dato ducatur AH ipſam contingens, vt iam dictum eſt: tum quadrato AG æquale fiat rectangulum DGE: & per E agatur contingenti AH parallela EF ſectioni occurrens in F: iungaturque DF. Dico rectam DF ſectionem BAC contingere in F. Hoc enim etiam ex conuerſa 23 huius manifeſto ſequitur.

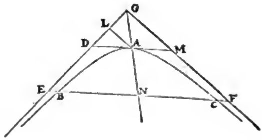


Sit rurſus propoſita BAC ſectio hyperbola, cuius centrum ſit G: aſymptoti autem GE, GF. Datumque punctum D primum intra angulum EGF. Ducatur ad ſectionem per D recta GDA, producaturque intra ſectionem in K, vt quadrato GA æquale ſit rectangulum DGK. Inuento autem axe, & à puncto A in ſectione dato ducta

ducta contingente A H: eidem per K æquidiſtans ducatur K L ſectioni occurrens in I: ducaturque D I. Dico rurſus rectam D I ſectionem B A C contingere in I. Cuius demonſtratio antecedenti eadem erit.

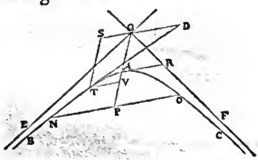


Sit iam datum punctum D in vna aſymptoto. Sectaque D G bifariam in L, ducatur L A alteri aſymptoto G F æquidiſtans occurrenſque ſectioni in A: iungaturque D A. Dico rectam D A ſectionem B A C contingere in A.



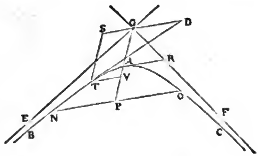
Producatur enim D A in M, & ipſi D M æquidiſtans ponatur E F ſectioni occurrens in B, & C: ducaturque G A, & producatur in N. Igitur quoniam L G æqualis eſt D L, erit & A M æqualis D A: atque etiam N F æqualis E N. Sed, ex coroll. 2 ad 39 huius, & C F æqualis eſt E B: quare & N C æqualis erit B N. Secta igitur erit B C bifariam in N: ideoque & diameter erit G A N, & ad ipſam ordinatim applicata B C: ex coroll. ad 11 huius. Eſt autem & punctum A ſectionis vertex, ex definit. & D A M æquidiſtans eſt B C: recta igitur D A, ex 17 huius, ſectionem B A C continget in A.

Sit denique datum D punctum in angulo deinceps ei qui ab aſymptotis continetur. Ducatur igitur per centrum G recta D G, & producatur. Sumpto autem in ſectione quolibet puncto N, ducatur in eadem recta N O æquidiſtans D G, & bifariam ſecetur in P: ductaque G P hyperbolem ſecante in A, ducatur ipſi N O æquidiſtans A R aſymptoto occurrens in R: quadratoque A R æquale ponatur rectangulum D G S: & per S ipſi G P æquidiſtans ponatur S T ſectioni occurrens in T: iungaturque D T. Dico rectam D T ſectionem B A C contingere in T.



A puncto enim T ad G P ducatur ipſi N O æquidiſtans T V. Quoniam igitur N O bifariam eſt ſecta in P: erit per centrum G ducta G P ſectionis diameter, & ad eam ordinatim applicata NP, per 11 huius, & ad eam coroll. Secat autem G P diameter hyperbolem in A:

quare & A ſectionis erit vertex. Eſtque A R ducta æquidiſtans N P: quare & ſectionem B A C continget in A, per 17 huius. Eſtque punctum R in vna aſymptoto: igitur, ex 38 huius, recta A R poterit quadrantem figuræ ad G P diametrum factæ. Quare & eidem quadranti figuræ æquale erit rectangulum D G S, hoc eſt D G, V T, ideoque, ex conuerſa 27 huius, & coroll. ad eandem, recta D T ſectionem B A C continget in T. Quod facere oportebat.



Si detur autem punctum T intra angulum qui ad verticem eſt angulo hyperbolem continenti; impoſſibile erit problema, & abſurdè propoſitum. Quoniam hoc caſu recta à dato puncto ad ſectionem quomodocunque ducta alterutram tantùm aſymptoton ſecans, & angulum qui ſectionem continet diuidens, tandem producta ſectioni occurret, ipſamque ſecabit: ex demonſtratis in 40 & 41 huius.

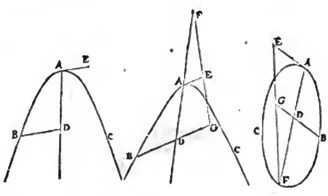
Coroll.

Itaque, ex proximè demonſtratis, Conſtat qua ratione à quolibet in ſectione puncto ad datam quamcunque diametrum recta ordinatim ſit applicanda: ſi nempè ei quæ ſectionem in datæ diametri vertice continget æquidiſtans à dato in ſectione puncto ducatur.

Probl. V. Prop. LVI.

Data cuiuſcunque coni ſectionis diametro: contiguam eiuſdem parametrum exhibere.

Sit coni ſectio B A C primùm parabola, eiuſque data diameter quæcunque A D: oportet contiguam eiuſdem parametrum exhibere.



Ducatur per anteced. ſectionem B A C contingens in A recta A E: & à quolibet in A D puncto D ducatur ad ſectionem recta D B æquidiſtans A E: quadrato autem B D æquale fiat rectangulum D A E. Dico A E eſſe parabolæ B A C parametrum ipſi A D diametro contiguam. Hoc autem manifeſtò conſtat ex 10 huius.

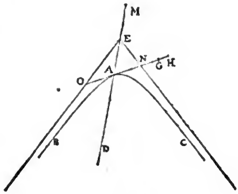
Digitized by Google

Sit autem propoſita ſectio B A C hyperbola, aut ellipſis, eiuſque data diameter quæcunque A D. Inueniatur, per coroll. ad 54 huius, tranſuerſa diameter A F: & per A ducatur ſectionem contingens A E, cui à quolibet in A D puncto D ad ſectionem ducatur æquidiſtans D B: & quadrato D B æquale ponatur rectangulum A D G: iunctaque F G rectam A E ſecet in E. Dico rectam A E eſſe ſectionis B A C parametrum ipſi A D diametro contiguam. Hoc enim etiam ex 13 huius manifeſtò conſtat. Quare exhibita eſt cuiuſcunque coni ſectionis diametro contigua parameter. Quod facere oportebat.

PROBL. VI. PROP. LVII.

Datæ cuiuſcunque hyperbolæ aſymptotos inuenire.

Sit data hyperbola B A C: oportet eiuſdem aſymptotos inuenire.



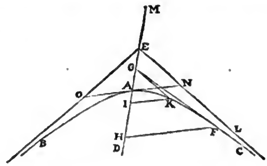
Inueniatur ſectionis diameter quæcunque A D, centrumque E, & tranſuerſa diameter A M. Sectionem autem contingat in A, per 55 huius, recta A G quæ ſit, per antecedentem, ſectionis parameter ipſi A D diametro contigua: & rectangulo, vel parallelogrammo, M A G æquale ponatur quadratum, vel rhombus, ex A H: ſectaque A H bifariam in N, iungatur E N, & producatur: productaque H A in O, vt ſit A O æqualis A N, iungatur item E O, & producatur. Dico E N, E O productas propoſitæ B A C hyperbolæ eſſe aſymptotos.

Quoniam enim contingit A H; erit ordinatim ad A D diametrum applicatis æquidiſtans, ex coroll. 2 ad 17 huius. Sed rectangulo, aut parallelogrammo, M A G, hoc eſt figuræ ſub vtroque latere M A, A G factæ æquale eſt quadratum, aut rhombus, A H: eſtque A N dimidia A H: recta igitur A N poterit quadrato, vel rhombo, quartam partem quadrati, vel rhombi, ex A H, hoc eſt quadrantem figuræ M A G: ideoque &, per ea quæ in 38 huius, & ad eam coroll. ſunt demonſtrata, oſtendetur, ex conuerſo, rectam E N à centro ductam, & quantumcunque productam ſectioni B A C non coincidere, vnamque ex eiuſdem aſymptotis eſſe. Eademque ratione, quoniam & A O æqualis eſt A N, ducta E O etiam quantumcunque producta ſectioni B A C non coincidet. Quare rectæ E N, E O productæ erunt propoſitæ B A C hyperbolæ aſymptoti inuentæ. Quod facere oportebat.

ALITER.

Sit data B A C hyperbola, cuius ſit diameter quæcunque A D;

vertex A, centrum E. Ducta autem contingente AN, à ſumpto in ſectione quolibet puncto F ducatur contingens FG cum producta DA diametro conueniens in G: ipſique AN æquidiſtans ducatur FH: & ſecta GH bifariam in I, ducatur IK æquidiſtans AN, ſectionique occurrens in K: tum ductæ GK æquidiſtans à centro E ducatur EL. Dico rectam EL ſectioni BAC non coincidere, eiuſque vnam eſſe ex aſymptotis.

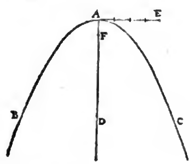


Secet enim EL rectam AN in N: & apponatur EM æqualis & in directum EA. Erit igitur AM tranſuerſa ſectionis diameter. Eſt autem rectangulo MIA vnà cum quadrato EA æquale quadratum EI: cui, propter æquales GI, IH, etiam æquale eſt rectangulum HEG, hoc eſt, propter contingentem FG, ex 22 huius, quadratum EA, vnà cum quadrato GI: rectangulo igitur MIA vnà cum quadrato EA æquale erit quadratum EA vnà cum quadrato GI: ablatoque communi EA quadrato, erit reliquum GI quadratum reliquo MIA rectangulo æquale. Quoniam autem, ex coroll. 2 ad 13 huius, vt MIA rectangulum, hoc eſt GI quadratum, ad IK quadratum, ita eſt tranſuerſa diameter MA ad contiguam parametrum: & ita EA quadratum ad AN quadratum: cum ſit EA dimidia tranſuerſa diameter; recta AN poterit quadrato, vel rhombo, ſpatium æquale quadranti figuræ ad MA tranſuerſam diametrum factæ. Quare rurſus ducta ENL hyperbolæ BAC non coincidet quantumcunque producta, eritque eiuſdem aſymptotos inuenta. Itaque & ſic problemati ſatisfactum erit.

PROBL. VII. PROP. LVIII.

Propoſitarum coni ſectionum vmbilicos inuenire.

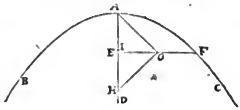
Sit propoſita BAC coni ſectio primùm parabola: inueniaturque axis AD, per 54 huius: & per 56 recta parameter AE: quadrantique ex AE æqualis ſumatur AF. Dico punctum F eſſe propoſitæ BAC parabolæ vmbilicum. Hoc autem ex definit. ſatis patet.



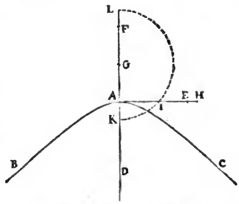
Aliter in parabola vmbilicus adhuc inuenietur.

Sit parabola BAC, eiuſque axis AD: & ſumpto in axe AD quolibet puncto E, erigatur perpendicularis EF, ſectioni occurrens in F: ſectaque

ſectaque E F bifariam in G, iunctæ A G perpendicularis excitetur GH. Sumpta A I æquali E H : Dico punctum I eſſe vmbilicum quæſitum.

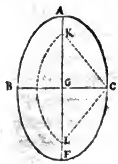


Quoniam enim quadratum E F rectangulo ſub A E & recta parametro eſt æquale : erit quadrati E F quadrans, ſcilicet quadratum E G, rectangulo ſub eadem A E & quadrante rectæ parametri æquale. Sed propter angulum A G H rectum, & rectum ad E, eidem EG quadrato æquale eſt AEH, hoc eſt EAI rectangulum: recta igitur AI quadranti rectæ parametri erit æqualis. Ideoque & punctum I, ex definit. propoſitæ B A C parabolæ erit vmbilicus.



Sit iam propoſita B A C ſectio hyperbola : inueniaturque axis tranſuerſus A F, & recta parameter A E, centrumque G: & rectangulo ſub F A, A E æquale fiat quadratum A H: ſectaque A H bifariam in I, centro G interuallo G I deſcripta circuli circumferentia axem A F vtrinque productum ſecet in duobus K & L punctis: Dico punctum K propoſitæ B A C hyperbolæ vmbilicum eſſe internum : & punctum L eiuſdem vmbilicum eſſe externum.

Quoniam enim angulus G A E rectus eſt: erit quadrato A I, hoc eſt quartæ parti figuræ, ſiue rectanguli, F A E æquale rectangulum L A K. Eſt autem G L æqualis G K : itemque G F æqualis G A : ideoque & reliqua F L reliquæ A K æqualis : rectangulum igitur K F L, hoc eſt A L F, rectangulo L A K, hoc eſt F K A, erit æquale. Applicatum igitur eſt ad axem tranſuerſum F A rectangulum quartæ parti figuræ ad eundem axem factæ æquale, excedens vtrinque quadrato rectæ A K, vel F L. Quare, ex definit. erunt puncta L, K propoſitæ B A C hyperbolæ vmbilici, hic internus, ille externus.

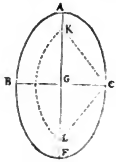


Sit autem propoſita B A C ſectio ellipſis: inueniaturque axis maior A F, & centrum G: ducta igitur per centrum G ipſi A F perpendicularis B G C erit axis minor. Centro itaque B, aut C, interuallo A G deſcripta circuli circumferentia ſecet axem A F in punctis K, & L. Dico puncta K, L propoſitæ B A C ellipſeos eſſe vmbilicos.

Quoniam enim A F axis eſt, & perpendicularis G C: erit G C ordinatim ad axem A F applicata. Quare, ex coroll. 2 ad 13 huius, vt G C quadratum ad rectangulum A G F, hoc eſt ad A G quadratum, ita

Digitized by Google

erit recta parameter ad A F axem tranſuerſum. Vt autem recta parameter ad axem tranſuerſum, ita eſt rectangulum, ſiue figura, ſub vtriſque ad quadratum axis tranſuerſi: & ita quadrans figuræ ad quadrantem quadrati axis tranſuerſi, ſcilicet ad quadratum A G: quadranti igitur figuræ ad axem factæ æquale erit quadratum G C. Eſt autem C K æqualis A G, & quadratum C K æquale eſt quadratis K G, G C: quadratumque A G æquale quadrato K G, & rectangulo F K A: communi igitur ablato K G quadrato, erit reliquum F K A, hoc eſt, propter æquales A K, L F, rectangulum L A K, reliquo G C quadrato, hoc

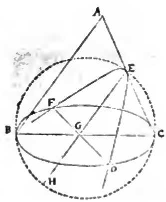


eſt quadranti figuræ ad axem factæ æquale. Sed & ſimiliter eidem G C quadrato, ſiue quadranti figuræ, æquale eſt A L F, ſiue K F L, rectangulum: applicatum igitur eſt ad axem tranſuerſum A F rectangulum æquale quadranti figuræ ad eundem axem factæ ex vtraque parte deficiens quadrato rectæ A K, vel F L. Quare, ex definit. erunt puncta K, L propoſitæ B A C ellipſeos vmbilici. Quos inuenire oportebat.

Probl. VIII. Prop. LIX.

Cuiuſcunque in cono exhibitæ ſectionis parametrum exhibere.

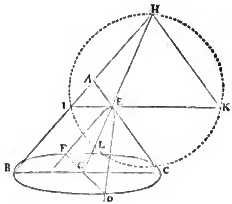
Sit conus A B C, & exhibita in eo ſectio D E F primùm parabola, cuius ſit diameter E G: oportet eiuſdem contiguam parametrum exhibere.



Intelligatur A B C conus & plano primùm per axem ſectus faciente triangulum B A C, & plano rurſus per D E F ſectus ſecundum lineam D G F quæ ſit ad B C baſim trianguli per axem perpendicularis. Sitque E G communis plani per D E F & trianguli per axem ſectio. Deſcriptaque per tria B, E, C puncta circuli circumferentia productam E G diametrum ſecet in H. Dico rectam G H æqualem eſſe ſectionis parametro.

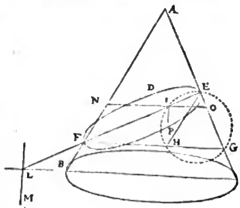
Quoniam enim D G F perpendicularis eſt ad B C; erit D G æqualis G F: quare & vtraque erit ad E G diametrum ordinatim applicata, ex coroll. ad 11 huius. Itaque, propter ſectionem, quadrato D G, hoc eſt rectangulo B G C, æquale erit rectangulum ſub E G intercepta diametro, & contigua eiuſdem parametro. Sed eidem B G C rectangulo æquale etiam eſt rectangulum E G H: recta igitur G H eidem ſectionis parametro erit æqualis.

Digitized by Google



Sit iam exhibita in cono ABC ſectio DEF hyperbola, cuius ſit diameter EG. Intelligatur, vt priùs, ABC conus plano primùm per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus etiam ſectus plano faciente ſectionem DEF ſecundum lineam DGF ad BC baſim trianguli per axem perpendicularem: & ſit EG communis eiuſdem per DEF plani, & trianguli per axem ſectio, quæ producta cum producto BA latere conueniat in H: ductæque HK æquidiſtanti AC occurrat in K recta IEK æquidiſtans BC, occurrenſque AB in I: & deſcripta per tria H, I, K puncta circuli circumferentia ſecet EG diametrum in L. Dico rectam EL ſectionis parametro eſſe æqualem.

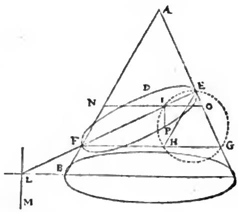
Quoniam enim DGF perpendicularis eſt ad BC: ideoque & DG æqualis eſt GF, & vtraque ad EG diametrum ordinatim eſt applicata; propter ſectionem vt DG quadratum, hoc eſt BGC rectangulum, ad HGE rectangulum, ita erit ſectionis parameter ad contiguam tranſuerſam diametrum. Sed ratio BGC rectanguli ad HGE rectangulum compoſita eſt ex rationibus BG ad GH, hoc eſt IE ad EH, & GC ad GE, hoc eſt EK ad EH: ideoque vt rectangulum BGC ad rectangulum HGE, ita eſt rectangulum IEK, hoc eſt LEH, ad quadratum EH: igitur vt rectangulum LEH ad quadratum EH, hoc eſt vt LE ad EH, ita erit ſectionis parameter ad contiguam tranſuerſam diametrum. Eſtque EH, ex definit. tranſuerſa ſectionis diameter: recta igitur LE eiuſdem contiguæ parametro erit æqualis.



Sit denique exhibita in cono BAC ſectio DEF ellipſis, cuius ſit diameter EF. Intelligatur igitur adhuc conus ABC plano primùm per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus etiam ſectus plano per DEF ſecundum lineam LM quæ ſit ad BC baſim trianguli per axem perpendicularis: ſitque EF communis plani per DEF, & trianguli per axem ſectio: ductaque FG æquidiſtante BC, ad ipſam ducatur EH æquidiſtans AB: & deſcripta per tria E, H, G puncta circumferentia circuli ſecet EF diametrum in I. Dico rectam FI ſectionis parametro eſſe æqualem.

Ducantur enim per I rectæ NIO æquidiſtans BC, & IP æquidiſtans LM. Secto igitur ABC cono plano per NO, IP, erit ſectio

N P O circulus baſi coni æquidiſtans, per 2 huius: cuius, & plani per D E F communis ſectio erit recta I P ad E I ſectionis diametrum ordinatim applicata: ex coroll. ad 6 & 11 huius. Sed, propter ſectionem, vt PI quadratum, hoc eſt N I O rectangulum, ad F I E rectangulum, ita eſt parameter ad F E tranſuerſam diametrum: eſtque ratio rectanguli N I O ad rectangulum F I E compoſita ex rationibus N I ad I F, hoc eſt H F ad F E, & O I ad I E, hoc eſt G F ad F E: ideoque, componendo, vt N I O



rectangulum ad F I E rectangulum, ita eſt G F H, hoc eſt E F I, rectangulum ad F E quadratum: igitur vt E F I rectangulum ad F E quadratum, hoc eſt, vt F I ad F E, ita erit parameter ad F E contiguam tranſuerſam diametrum. Quare & recta F I ſectionis parametro ipſi F E tranſuerſæ diametro contiguæ erit æqualis. Exhibita igitur eſt vniuſcuiuſque in cono propoſitæ ſectionis parameter. Quod facere & demonſtrare oportebat.

PRIMI LIBRI FINIS.

Digitized by Google

Ad ſecundum Conicorum librum

MONITVM.

Habes iam, Lector φιλόμαθης, expoſitam coni ſectionum generationem: atque etiam, nî fallimur, probè ſatis cognitam propriam cuiuſque naturam. Habes præmiſſa præcipua elementa conica, quibus, vt fundamentis, tota conicorum moles innititur. Siquidem ab ipſis ad ſolidorum problematum, ſi lubet, ſolutiones & compoſitiones tibi Apollonium Pergæum ſiue imitanti, ſiue omninò aut pro parte ſepultum exſuſcitanti, facilis paratur methodus & aperta patet via. Sed certè ad radij phyſici vtriuſque, ſiue reflexi, ſiue refracti, notitiam & examen, qui noſter ſcopus eſt, nobis ab ijſdem norma petenda fuit, & hinc nobis ſiue eruendus, ſiue componendus fuit lapis Lydius, totaque ratio deſumenda.

Quoniam autem vix, aut ſaltem parùm, profuturum ſit coni ſectionum ortum & propriam naturam cognouiſſe, ſi non illas quaqua ratione exprimere, &, vbi opus, imitari liceat, atque ſic ad proprios & neceſſarios vſus accommodare: eapropter proximè ſequenti libro geometricam ipſas per puncta deſcribendi rationem & methodum multimodam proſequi oportunum nobis viſum eſt, vnde omnimoda earumdem figuratio mechanica, ſiue inſtrumentalis, ortum facilè ducat, & fidem accipiat. Quanquam & qui compendioſiores per puncta deſcriptiones probè nouerit, & in ipſis aliquandiu ſe exercuerit, reliquas organicas haud dubiè ſpreuerit, vt quæ non æquè latè pateant, nec ita in promptu ſint. Quandoquidem & mechanicæ conicarum linearum figurationes vix optatis aptè reſpondent, & ſæpè ſæpiùs ad opus deficiunt, & inutiles tandem dignoſcuntur, niſi cautè & induſtriè atque etiam ingenioſa manu tractentur. Agnoſcent illicò qui vnum aut alterum, ſiue Apollonianum, ſiue noſtrum, ſchœma imitari, nedum reſtituere aggredientur: & qui ad optatum ſpeculum, aut ad propoſitam lentem diaphanam, propriam conicam lineam exprimere tentabunt. Quibus vtriſque præſtandis ſequentem proximè librum, ſi frequentiùs ad praxim reuocetur, facturum ſatis pollicemur. Nec aliundè nobis ad eadem opem quamcunque allatam teſtamur.

Sed & operæpretium hîc monuiſſe duximus, conſultò nos in

Digitized by Google

ſecundo hoc libro ſingulis deſcribendarum conicarum linearum methodis propria theoremata præmiſiſſe quæ ipſis fidem aſtruant: quò ſcilicet, primò, propria cuiuſque coni ſectionis, rectarumque ipſi inſcriptarum aut adſcriptarum natura eluceſcat magis & notior fiat, ideoque & hic ſecundus liber antecedenti aptiùs cohæreat: deinde vt compendioſior nonnihil reddatur vnaquæque propoſitæ conicæ lineæ deſcriptio, dum quæſita & exhibita in ipſa puncta omnia plerumque vno eodemque ſigno aut charactere notantur, & vna eademque via & ratione inuenta exhibentur.

Nec te mouere debet, quod in eodem hoc libro ſiue in theorematibus comparata, ſiue in problematibus quæſita puncta nonnunquam in certa aut ſpecie data hyperbola, vel ellipſi, proponantur: quaſi in nondum maturam meſſem falce immiſſa: quandoquidem hyperbolæ & ellipſes ſpecie datæ, ſiue mauis certæ, ſunt quarum figuræ ſunt cognitæ, vt ſuo notabitur loco. Quare & propoſito magis congruum viſum eſt ſpecie datarum hyperbolarum, vel ellipſium, deſcriptionem inſtituere è datis figurarum lateribus, tranſuerſa ſcilicet diametro, & contigua parametro, vnà cum angulo ab ipſis contento: quàm ſimplicem indeterminatarum hyperbolarum, aut ellipſium, formationem proponere.

Digitized by Google

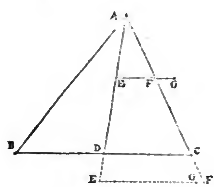
CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER SECVNDVS.

De Geometrica Conicarum linearum in plano per puncta deſcriptione.

AD GENERALEM METHODVM I.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC bifariam ſecta ſit in D: à quolibet autem ductæ, &, vbi opus, productæ AD puncto E facta EF parallela DC quæ occurrat AC in F, rectangulo CD, EF æquale fiat quadratum EG: Dico punctum G eſſe in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.



Quoniam enim rectangulo CD, EF æquale eſt quadratum EG; erit vt CD ad GE, ita GE ad FE: & vt CD quadratum ad EG quadratum, ita CD ad FE. Sed vt CD ad FE, ita eſt AD ad AE: igitur vt AD ad AE, ita erit CD vel BD quadratum ad GE quadratum. Poſita igitur AD paraboles diametro, & vertice A, erit vtraque GE, CD, vt & BD, a ſectione ad AD diametrum, per 4 & 6 primi huius, ordinatim ducta. Quare & punctum G in eadem erit parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

ſecundo hoc libro ſingulis deſcribendarum conicarum linearum methodis propria theoremata præmiſiſſe quæ ipſis fidem aſtruant: quò ſcilicet, primò, propria cuiuſque coni ſectionis, rectarumque ipſi inſcriptarum aut adſcriptarum natura eluceſcat magis & notior fiat, ideoque & hic ſecundus liber antecedenti aptiùs cohæreat: deinde vt compendioſior nonnihil reddatur vnaquæque propoſitæ conicæ lineæ deſcriptio, dum quæſita & exhibita in ipſa puncta omnia plerumque vno eodemque ſigno aut charactere notantur, & vna eademque via & ratione inuenta exhibentur.

Nec te mouere debet, quod in eodem hoc libro ſiue in theorematibus comparata, ſiue in problematibus quæſita puncta nonnunquam in certa aut ſpecie data hyperbola, vel ellipſi, proponantur: quaſi in nondum maturam meſſem falce immiſſa: quandoquidem hyperbolæ & ellipſes ſpecie datæ, ſiue mauis certæ, ſunt quarum figuræ ſunt cognitæ, vt ſuo notabitur loco. Quare & propoſito magis congruum viſum eſt ſpecie datarum hyperbolarum, vel ellipſium, deſcriptionem inſtituere è datis figurarum lateribus, tranſuerſa ſcilicet diametro, & contigua parametro, vnà cum angulo ab ipſis contento: quàm ſimplicem indeterminatarum hyperbolarum, aut ellipſium, formationem proponere.

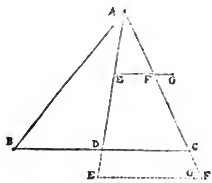
CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER SECVNDVS.

De Geometrica Conicarum linearum in plano per puncta deſcriptione.

AD GENERALEM METHODVM I.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC bifariam ſecta ſit in D: à quolibet autem ductæ, &, vbi opus, productæ AD puncto E facta EF parallela DC quæ occurrat AC in F, rectangulo CD, EF æquale fiat quadratum EG: Dico punctum G eſſe in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.

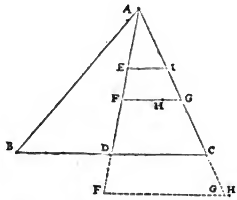


Quoniam enim rectangulo CD, EF æquale eſt quadratum EG; erit vt CD ad GE, ita GE ad FE: & vt CD quadratum ad EG quadratum, ita CD ad FE. Sed vt CD ad FE, ita eſt AD ad AE: igitur vt AD ad AE, ita erit CD vel BD quadratum ad GE quadratum. Poſita igitur AD paraboles diametro, & vertice A, erit vtraque GE, CD, vt & BD, a ſectione ad AD diametrum, per 4 & 6 primi huius, ordinatim ducta. Quare & punctum G in eadem erit parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

Theor. II. Prop. II.

Si ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ducta autem AD vtcunque ſecta in E, à ſumpto in ED, etiam quandolibet producta, quolibet puncto F ducatur FG parallela DC quæ occurrat AC in G: fiatque rectangulo EFG æquale quadratum FH: Dico punctum H eſſe in eadem certa hyperbola, cuius ſit vertex E.



Quoniam enim quadratum FH rectangulo EFG factum eſt æquale; erit vt GF ad HF, ita HF ad FE: & vt GF quadratum ad HF quadratum, ita erit GF ad FE: hoc eſt ita rectangulum GFA ad rectangulum EFA: &, permutando, vt GF quadratum ad rectangulum GFA, hoc eſt vt GF ad FA, ita erit quadratum HF ad rectangulum AFE. Sed facta EI parallela DC, erit vt GF ad FA, ita IE ad EA: igitur vt IE ad EA, ita erit HF quadratum ad rectangulum AFE. Poſita igitur AE hyperboles tranſuerſa diametro, & EI eiuſdem contigua parametro, ideoque & E eiuſdem vertice, erit recta HF à ſectione ad EF diametrum ordinatim ducta: per corol. 1 ad 13 primi huius. Quare punctum H in eadem erit certa hyperbola cuius ſit vertex E, tranſuerſa diameter EA, & contigua parameter EI. Quod erat demonſtrandum.

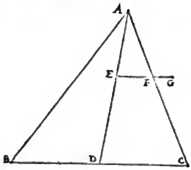
Theor. III. Prop. III.

Si ſit triangulum quodlibet BAC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: à quolibet autem in AD puncto E ducta EF parallela DC, quæ occurrat AC in F, rectangulo DEF æquale ponatur quadratum EG: Dico puncta A, G, D eſſe in eadem certa ellipſi.

Quoniam enim rectangulo DEF æquale factum eſt EG quadratum; erit vt FE ad EG, ita EG ad ED: & vt FE quadratum ad EG quadratum, ita erit FE ad ED, hoc eſt ita AEF rectangulum ad AED rectangulum: &, permutando, vt FE quadratum ad AEF rectangulum, hoc eſt vt FE ad EA, ſiue vt CD ad DA, ita erit

EG

EG quadratum ad AED rectangulum. Poſita igitur AD ellipſeos tranſuerſa diametro, & DC eiuſdem contigua parametro, erit GE à ſectione ad AE diametrum ordinatim ducta: per coroll. 2 ad 13 primi huius. Quare & puncta A, G, D in eadem erunt certa ellipſi, cuius tranſuerſa diameter ſit AD, & contigua parameter DC. Quod erat demonſtrandum.



CONSECTARIVM.

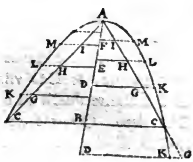
Itaque Quotieſcunque aliquod proponetur triangulum bifariam recta à vertice ad mediam baſim ducta diuiſum, & ab aliquo puncto ad biſecantem recta ducetur baſi æquidiſtans, cuius quadratum rectangulo deſignatorum in tribus præmiſſis theorematibus alicui ſimiliter facto fuerit æquale; aſſumptum eiuſmodi punctum in certa aliqua coni ſectione dicetur eſſe cuius erit diameter recta triangulum bifariam diuidens. *Quare & hinc manabit*

GENERALIS METHODVS I.

PROBLEMA I. PROP. IIII.

Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam parabolam in plano per puncta quotlibet deſcribere.

Sit propoſita recta AB deſcribendæ paraboles diameter quæcunque, ſitque BC vna ex ordinatim ad ipſam ductis in angulo ABC dato. Oportet circa datas eiuſmodi AB, BC parabolam in eodem plano per puncta deſcribere.



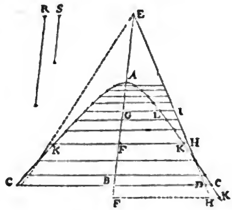
Iungatur AC: ſectaque AB, vel AC, in quotlibet partes, per ſingula diuiſionum puncta ipſi BC parallelæ agantur, vt DG, EH, FI, &c. ſingulisque BC, DG, BC, EH, BC, FI, & reliquis eiuſmodi rectangulis ſingula fiant DK, EL, FM, &c. æqualia quadrata. Palam eſt ex 1. huius, propter triangulum CAC recta AB bifariam diuiſum, puncta M, L, K in eadem fore parabola quæ per A, C puncta tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu eadem A, M, L, K, C puncta

Digitized by Google

curua iungantur linea ; erit illa parabole quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. II. PROP. V.

Circa datam quamcunque diametrum & ordinatam hyperbolam ſpecie notam per puncta in plano deſcribere.

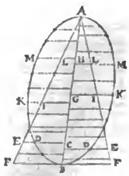


Sit A B quæſitæ hyperboles diameter quæcunque, & B C ad ipſam ordinatim ducta in angulo A B C dato. Species autem ſectionis ſit ratio tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum eadem quæ R ad S. Oportet circa propoſitas A B, B C hyperbolam datæ ſpeciei in eodem plano per puncta deſcribere.

Quadrato B C æquale fiat A B D rectangulum : & vt S ad R, ita ſit BD ad BE: iungaturque D E. Sumptis autem in A B, vel etiam producta, quotlibet punctis vt F, G, parallelæ totidem ipſi B C agantur F H, G I: & ſingulis A F H, A G I rectangulis æqualia ponantur ſingula F K, G L, quadrata. Erunt, ex 2 huius, propter triangulum D E D recta E B bifariam diuiſum, puncta L, K, C in eadem hyperbola cuius ſit A vertex, & A E tranſuerſa diameter ſe ad contiguam parametrum habens vt E B ad B D, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi eadem A, L, K, C, & reliqua eiuſmodi puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea ; erit illa hyperbole quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. III. PROP. VI.

Circa datam diametrum & ordinatam ellipſim ſpecie notam per puncta in plano deſcribere.



Sit A B quæſitæ ellipſeos tranſuerſa diameter quæcunque, & C D vna ex ordinatim ad ipſam à ſectione ductis in quocunque angulo A C D dato. Oportet circa eiuſmodi datas A B, C D ellipſim in eodem plano per puncta deſcribere.

Quadrato C D æquale ponatur rectangulum B C E : iunctæque A E & productæ occurrat in F ducta B F ipſi C D parallela : tum ſumptis in A B quotlibet alijs G, H, &c. punctis, ductiſque totidem G I, H L parallelis, fiant ſingulis B G I, B H L rectangulis æqualia ſingula G K, H M quadrata. Erunt, ex 3 huius,

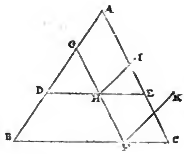
Digitized by Google

propter triangulum F A F recta A B biſariam diuiſum, puncta M, K, D in eadem ellipſi cuius ſit A B tranſuerſa diameter, & B F contigua parameter, ideoque & ſpecie nota. Quare ſi eadem A, M, K, D, B, & reliqua eiuſmodi inuenta puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

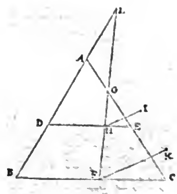
AD GENERALEM METHODVM II.

THEOR. IIII. PROP. VII.

Si ſit triangulum quodlibet B A C linea D E baſi B C æquidiſtante ſectum, quod rurſus linea F G ad baſim quomodocunque inclinata, ſiue etiam perpendiculari, parallelamque D E ſecante in H, diuidatur: rectæque F G à puncto ſectionis H quomodocunque applicetur H I, cuius quadratum ſit rectangulo D H E æquale: Dico punctum I eſſe in coni ſectione cuius ſit diameter G F, & vertex G.

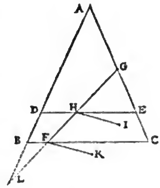


Ducatur à puncto F ipſi H I æquidiſtans F K, cuius quadratum ſit rectangulo BFC æquale: ſitque primùm F G alterutri laterum trianguli A B C, vt A B, æquidiſtans. Sunt igitur æquales inuicem rectæ F C, H E: ideoque vt B F ad D H, ita erit B F C rectangulum ad rectangulum D H E: hoc eſt ita quadratum F K ad quadratum H I. Sed ita eſt etiam G F ad GH: poſita igitur GF paraboles diametro, & G eiuſdem vertice, erit, ex 7 primi huius, vtraque KF, IH recta à ſectione ad G F diametrum ordinatim ducta. Quare & vtrumque K & I punctum in eadem erit ſectione, ſiue parabola, cuius ſit vertex G, & diameter G F.



Secet iam F G producta latus A B extra verticem in L. Igitur vt L F ad F B, ita erit L H ad H D: & vt G F ad F C, ita erit G H ad H E: quare, componendo, vt LFG rectangulum ad BFC rectangulum, hoc eſt ad F K quadratum, ita erit L H G rectangulum ad D H E rectangulum: ſiue ad HI quadratum: & permutatim. Quare, poſita G F hyperboles intercepta diametro, & G L eiuſdem tranſuerſa, erit, ex 8 primi huius, vtraque K F,

I H à ſectione ad G F diametrum ordinatim applicata. Vtrumque igitur K & I punctum in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius ſit diameter G F, & vertex G.

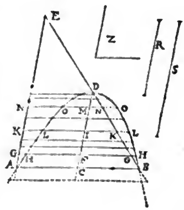


Secet denique G F producta latus A B infra baſim, vt in L. Erit ſimiliter vt L F ad F B, ita L H ad H D: & vt G F ad F C, ita erit G H ad H E: quare, componendo, vt L F G rectangulum ad B F C rectangulum, hoc eſt ad F K quadratum, ita erit L H G rectangulum ad rectangulum D H E, hoc eſt ad H I quadratum: & permutatim: Poſita igitur G L tranſuerſa ellipſeos diametro, erit, ex eadem 8 primi huius, vtraque K F, I H à ſectione ad ipſam ordinatim applicata. Quare & vtrumque K & I punctum in eadem ellipſi erit cuius ſit L G tranſuerſa diameter, ideoque & vertex vterque L, G. Vtrouis igitur caſu punctum I in coni ſectione conſiſtit. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS II.

PROBL. IIII. PROP. VIII.

Circa datam diametrum & baſim figuram parabola contentam in plano per puncta deſcribere.



Sit data quæſitæ figuræ diameter R, baſis S, anguluſque inclinationis ad inuicem æqualis Z.

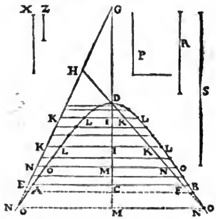
Expoſita recta A B baſi S æqualis bifariam ſecetur in C: educaturque C D æqualis diametro R, facienſque angulum B C D dato Z angulo æqualem: iunctæque B D & productæ occurrat in E ducta A E ipſi C D parallela: tum ſumptis in C D quotlibet punctis F, I, M, per eadem parallelæ totidem agantur F G, I K, M N ipſis E B, E A occurrentes in G, K, N: & ſingulis G F G, K I K, N M N rectangulis ſingula fiant æqualia reſpondentia quadrata F H, I L, M O. Erunt, ex antecedente, propter triangulum A E B recta C D ipſi A E æquidiſtante diuiſum, puncta O, L, H, & reliqua huiuſmodi inuenta in eadem parabola cuius ſit diameter D C, & vertex D. Quare ſi æquabili manus ductu A, D, O, L, H, B puncta curua iungantur linea; erit illa parabolæ portio: ideoque & quæſita A D B figura erit in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. V.

Digitized by Google

PROBL. V. PROP. IX.

Circa datam diametrum & baſim figuram hyperbola ſpecie nota contentam in plano per puncta deſcribere.

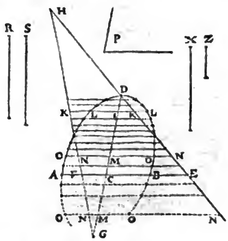


Sit data quæſitæ figuræ diameter R, baſis S, anguluſque inclinationis ad inuicem æqualis P. Species autem ſectionis ſit tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio eadem, quæ X ad Z.

Expoſita recta AB baſi S æqualis bifariam ſecetur in C: educaturque CD æqualis R, facienſque BCD angulum æqualem dato P angulo: tum facta CE æquali CD, quadrato AC, vel CB, æquale ponatur rectangulum ECF: & vt Z ad X, ita fiat FC ad CG: iunctæque EG occurrat iuncta FD in H: ſumptiſque in CD quotlibet punctis M, I, per eadem totidem ipſi AB parallelæ agantur MN, IK occurrentes HE & HF in N & K: ſinguliſque NMN, KIK rectangulis ſingula ponantur æqualia reſpondentia quadrata MO, IL. Erunt, ex 7 huius, propter EHF triangulum recta CD diuiſum, puncta L, O in eadem hyperbola cuius ſit vertex D, & tranſuerſa diameter DG ſe ad contiguam parametrum habens, vt X ad Z, vel vt GC ad CF: hoc eſt, vt GCD rectangulum ad DCF rectangulum, ſiue CB quadratum. Quare ſi æquabili manus ductu puncta A, D, L, O, B curua iungantur linea; erit illa hyperbolæ ſpecie notæ portio: ideoque & quæſita ADB figura per puncta in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. VI. PROP. X.

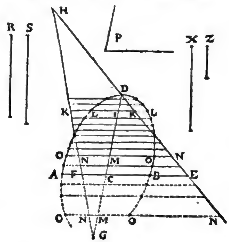
Circa datam diametrum & baſim figuram ellipſi ſpecie nota contentam per puncta in plano deſcribere.



Sit data quæſitæ figuræ diameter R, baſis S, anguluſque inclinationis ad inuicem æqualis P. Species autem ſectionis ſit tranſuerſę diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ X ad Z.

Expoſita recta AB baſi S æqualis bifariam ſecetur in C: educaturque CD æqualis diametro R, quæ faciat angulum BCD dato P angulo æqualem: tum facta CE æquali CD, quadrato AC, aut CB, æquale ponatur rectan-

gulum ECF: & vt Z ad X, ita ſit FC ad CG: iunctæque & productæ GF occurrat iuncta & producta ED in H: tum ſumptis in DC quotlibet punctis M, I, per eadem totidem ipſi AB parallelæ agantur MN, IK ipſis HE, HF rectis occurrentes in N & K: ſingulisque NMN, KIK rectangulis ſingula ponantur æqualia reſpondentia quadrata MO, IL. Erunt, ex 7 huius, propter FHE triangulum recta CD diuiſum, puncta L, O in eadem ellipſi cuius ſit DG tranſuerſa diameter ſe ad contiguam parametrum habens, vt X ad Z, ſiue vt GC ad CF: hoc eſt vt GCD rectangulum ad DCF rectangulum, ſiue CB quadratum. Quare ſi æquabili manus ductu puncta A, D, L, O, B, G, & reliqua eiuſmodi inuenta curua iungantur linea; erit illa ellipſis ſpecie nota: ideoque & quæſita ADB figura per puncta in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

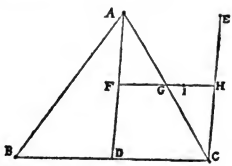


AD GENERALEM METHODVM III.

THEOR. V. PROP. XI.

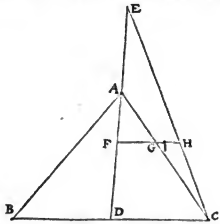
Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ductæque AD æquidiſtans & æqualis ab alterutro B, aut C, termino ducatur CE: & ſumpto in AD quolibet puncto F, ducatur ipſi BC parallela FGH ſecans AC in G, & occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C in eadem eſſe parabola.

Hoc autem patet ex 1. huius. Quoniam FH æquatur DC: ideoque & rectangulum HFG rectangulo CD, FG eſt æquale. Quare & hîc etiam erit punctum I in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. VI. PROP. XII.

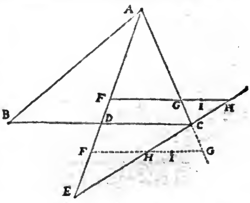
Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC bifariam ſit ſecta in D: iunctaque AD & producta verſus A quantumlibet in E, ducatur EC: & ſumpto in AD quolibet puncto F, ducatur FG parallela DC occurrens EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C in eadem eſſe hyperbola ſpecie nota.



Quoniam enim vt DC ad FH, ita eſt ED ad EF: & vt DC ad FG, ita eſt AD ad AF: erit, componendo, vt DC, vel DB, quadratum ad GFH rectangulum, hoc eſt FI quadratum, ita EDA rectangulum ad EFA rectangulum. Poſita igitur AE tranſuerſa hyperboles diametro, erit vtraque CD, IF, per 8 primi huius, à ſectione ad AD diametrum ordinatim ducta. Quare & punctum I in eadem erit hyperbola quæ per puncta B, A, C tranſit, cuius tranſuerſæ AE diametri ad contiguam parametrum ratio eadem erit quæ rectanguli EDA ad quadratum DC. Sunt igitur puncta B, A, I, C in eadem hyperbola ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. VII. PROP. XIII.

Si ſit triangulum quodcunque BAC cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ductaque AD & producta quantumlibet in E, iungatur EC, & producatur: ſumptoque in AE quolibet alio puncto F, ducatur FG parallela DC, occurrens AC, vbi opus productæ, in G, & ipſi EC in H: rectanguloque GFH æquale ponatur quadratum FI: Dico puncta B, A, I, C, E eſſe in eadem ellipſi ſpecie nota.



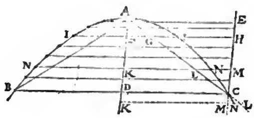
Quoniam enim vt AD ad AF, ita eſt DC ad FG: & vt DE ad FE, ita eſt DC ad FH: erit, componendo, vt ADE rectangulum ad AFE rectangulum, ita DC quadratum ad GFH rectangulum, hoc eſt FI quadratum: & permutatim. Quare poſita AE tranſuerſa ellipſeos diametro, erit vtraque CD, IF à ſectione ad AE diametrum ordinatim ducta, per 8 primi

huius. Punctum igitur I in eadem erit ellipſi quæ per puncta B, A, C, E tranſit, cuius A E tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio erit eadem quæ A D E rectanguli ad D C quadratum. Quare & puncta B, A, I, C, E in eadem erunt ellipſi ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS III.

PROBL. VII. PROP. XIIII.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta deſcribere.

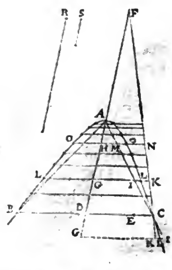


Sit datum B A C triangulum circa quod oporteat parabolam per puncta deſcribere.

Secetur B C bifariam in D: ductæque A D fiat parallela & æqualis C E: ſumptiſque in A D quotlibet F, K punctis, per eadem totidem agantur ipſi B C parallelæ F G H, K L M: ſinguliſque G F H, L K M rectangulis ſingula ponantur reſpondentia F I, K N quadrata. Palam eſt, ex 11 huius, puncta I, N, & reliqua huiuſmodi inuenta, in eadem eſſe parabola quæ per B, A, C tranſit. Quare ſi eadem curua æquabili manus ductu iungantur linea; erit illa parabola in plano circa B A C triangulum per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. VIII. PROP. XV.

Circa datum quodcunque triangulum hyperbolam ſpecie notam in plano per puncta deſcribere.



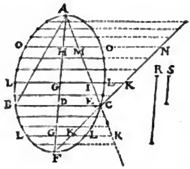
Sit datum B A C triangulum, circa quod oporteat hyperbolam deſcribere. Species autem ſectionis ſit tranſuerſę diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur B C baſis bifariam in D: & quadrato D C æquale ponatur rectangulum A D E: producta autem D A, fiat vt S ad R, ita E D ad D F: iungaturque C F: tum ſumptis quotlibet in A D punctis G, H, per eadem totidem parallelæ ipſi D C agantur G I K, H M N: ſinguliſque I G K, M H N rectangulis ſingula fiant æqualia reſpondentia quadrata G L, H O. Erunt ex 12 huius,

huius, puncta O & L in eadem hyperbola quæ per puncta B, A, C tranſit, cuius tranſuerſa erit diameter F A ad contiguam parametrum ſe habens vt R ad S, ſiue vt F D ad D E: hoc eſt vt F D A rectangulum ad A D E rectangulum, vel D C quadratum. Quare ſi eadem B, A, O, L, C, & reliqua eiuſmodi inuenta puncta curua iungantur linea; erit illa hyperbola ſpecie nota in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. IX. PROP. XVI.

Circa datum quodcunque triangulum ellipſim ſpecie notam in plano per puncta deſcribere.



Sit datum B A C triangulum, circa quod oporteat ellipſim deſcribere, cuius ſpecies ſit tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secta baſi B C bifariam in D, ductaque A D, quadrato D C æquale ponatur rectangulum A D E: & vt S ad R, ita, producta A D, fiat E D ad D F: iunctaque F C, & producta, ſumantur in A F quotlibet alia, præter D, puncta G, H: & per eadem totidem ipſi D C parallelæ agantur G I K, H M N ipſi F C occurrentes in K, & N: & ipſi A C, vbi opus productæ, in I, & M: ſingulisque I G K, M H N rectangulis ſingula fiant æqualia reſpondentia G L, H O quadrata. Erunt, ex 13 huius, puncta O, L in eadem ellipſi quæ per puncta F, B, A, C tranſit, cuius erit tranſuerſa diameter A F ſe ad contiguam parametrum habens vt R ad S, hoc eſt vt F D ad D E: ſiue vt F D A rectangulum ad A D E rectangulum, vel D C quadratum. Quare ſi eadem B, A, O, L, C, F, & reliqua huiuſmodi inuenta puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipſis ſpecie nota in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

MONITVM.

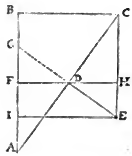
Non te moueat, Lector, ſi præcedentibus methodis ſequentem aliquantò operoſiorem hîc adnectimus, è duobus proximè præmittendis theorematibus deductam. E re tua maximè eſt illam non omiſiſſe: at certè digna nobis viſa eſt quæ apponeretur. Quandoquidem primò omnibus coni ſectionibus in plano per puncta deſcribendis æquè communicat, vt inibi patebit. Sed præſertim (quod in ea magna & ſpeciali notatione dignum tibi videri debet) quoniam, ſi penitiùs introſpicias, vniuſcuiuſque coni ſectionis non ſolùm

in plano deſcripta ortum & generationem, ſed & deſcribendæ methodum aperit, & propriam cuiuſque naturam conſequitur: ita vt mechanicam maximè vrgeat, & excitet: facilemque organicam conſtructionem, & propriam vnicuique ſectioni, in plano præſertim per fila lineandæ, inſtrumenti fabricam digito quamproximè monſtret. Atque etiam hinc vmbilicorum nomen paſſim iam à nobis vſurpatum deinceps manifeſtò ſe prodit. Non te igitur pœniteat interim duo præmittenda theoremata, quibus ſequentes binæ etiam generales methodi innituntur, attentiùs reuiſiſſe. Magnum haud dubiè ſub eis latet myſterium: magnus ad ſpecularia & dioptricem theſaurus eorum ope olim ſuo loco proponetur eruendus.

AD GENERALEM METHODVM IIII.

THEOR. VIII. PROP. XVII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC rectangulum ad B: ſectæque AC bifariam in D perpendicularis excitetur DE, cui à puncto C ducta CE ipſi AB parallela occurrat in E: ſeceturque AB bifariam in F: Dico punctum E eſſe in eadem parabola cuius vertex ſit F, & vmbilicus A.



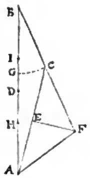
Producta enim ED in G, & ducta FD in H, à puncto E ducatur EI parallela BC. Igitur, propter æquales AD, DC, itemque BF, FA, & parallelas AB, CE, erit FH parallela BC, & recta FD rectæ DH æqualis. Sunt autem & anguli ad H, & F recti: quare & HE, hoc eſt FI, erit æqualis FG. Sed, propter vtrumque ad D & F angulum rectum, quadratum FD æquale eſt AFG, hoc eſt IFA, rectangulo: igitur quadruplum FD quadratum, hoc eſt IE quadratum, æquale erit rectangulo ſub IF & quadrupla FA. Exiſtente igitur A vmbilico paraboles, & eiuſdem vertice F; erit quadrupla FA rectæ parametro æqualis: ideoque & EI à ſectione ad axem ordinatim, ex 10 primi huius, erit applicata. Quare & punctum E erit in eadem ſectione. Quod erat demonſtrandum.

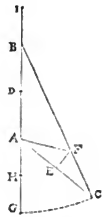
THEOR. IX. PROP. XVIII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC non rectangulum ad C: factaque BG æquali BC, ſecetur GA bifariam in H:

& ſectæ AC bifariam in E erigatur perpendicularis EF quæ occurrat lateri BC in F: Dico punctum F eſſe in hyperbola, aut ellipſi, cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.

Secetur AB bifariam in D. Quoniam igitur & AG ſecta eſt bifariam in H: erit DH dimidiæ inter vtramque AG, AB differentiæ, hoc eſt dimidio BG æqualis. Eſt autem BG æqualis BC: quare ſumpta HI dupla DH erit ipſi BC æqualis. Propter æquales autem AE, EC, & perpendicularem EF, ducta AF erit æqualis FC: ſi quidem igitur angulus C eſt obtuſus, ſuperabit BF rectam AF, hoc eſt CF, quantitate rectæ BC, hoc eſt HI. Sin autem angulus C eſt acutus, erunt BF, FA ſimul ipſi BC, hoc eſt rectæ HI, æquales. Poſitis igitur hyperboles, vel ellipſeos, axe tranſuerſo HI, & vmbilicis A, B; erunt, ex 51 primi huius, rectæ AF, BF ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum F inclinatæ. Quare & punctum F in eadem erit ſectione cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*





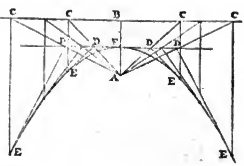
GENERALIS METHODVS IIII.

PROBL. X. PROP. XIX.

Datis, poſitione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem in eodem plano per puncta deſcribere.

Sit datus A paraboles vmbilicus, ciuſque vertex F.

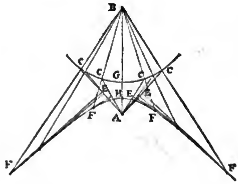
Iuncta AF producatur in B, vt ſit FB æqualis AF: & à punctis F & B ipſi AB perpendiculares excitentur FD, BC productæ quantum opus erit: ductis autem à puncto A quotcunque rectis, vt AC, ſecantibus rectam FD, vt in D, perpendiculares totidem ijſdem erigantur, vt DE, occurrentes ductis à punctis C ipſi AB parallelis, vt CE, in E. Palam igitur eſt, ex 17 huius, inuenta eiuſmodi puncta, vt E, in eadem eſſe parabola cuius ſit vertex F, & vmbilicus in A.



Quare ſi eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XI. PROP. XX.

Datis, poſitione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta deſcribere.

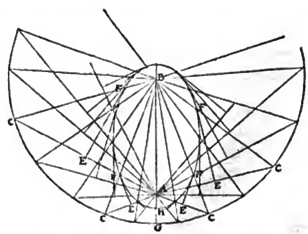


Sint dati hyperboles vmbilici A, B, vertexque H: iuncta AB tranſibit vtique per H.

Sumatur igitur HG æqualis AH: & centro B, interuallo BG, deſcribatur circuli circumferentię portio GC quam à puncto B eductę quotcunque rectę, vt BF, ſecent in C, eiuſmodi vt à puncto A ad ſingula in GC puncta totidem rectæ ductæ, vt AC, angulum faciant ACB recto maiorem: quibus bifariam ſectis, vt in E, perpendiculares excitentur, vt EF, occurrentes rectis reſpondentibus à puncto B eductis, vt BCF, in F. Erunt, propter triangulum ABC obtuſiangulum ad C, huiuſmodi inuenta puncta omnia, vt F, ex 18 huius, in eadem hyperbola cuius erunt vmbilici A, B, & vertex H. Quare ſi eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbola in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XII. PROP. XXI.

Datis, poſitione, ellipſeos vmbilicis, & alterutro vertice; ellipſim in eodem plano per puncta deſcribere.



Sint dati ellipſeos vmbilici A, B, vertexque alteruter H: producta igitur BA tranſibit per H.

Sumatur in AB producta recta HG æqualis AH: & centro B, interuallo BG, deſcribatur arcus, vel etiam integra circuli circumferentia GC, ad quam à puncto B quotcunque rectæ educantur, vt BC: iunctiſque AC, & bifariam ſectis in E: perpendiculares excitentur, vt EF, ipſis

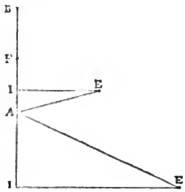
BC

B C reſpondentibus rectis occurrentes in F. Erunt, ex 18 huius, propter triangulum A B C acutiangulum ad C, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem ellipſi cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quare ſi eadem æquabili manu curua iungantur linea; erit illa ellipſis in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

AD GENERALEM METHODVM V.

THEOR. X. PROP. XXII.

Si ſit data quæcunque recta linea A B bifariam diuiſa in F: & ſumpto in F A, vel in ipſa producta, quolibet alio puncto I, excitetur perpendicularis I E eiuſmodi, vt ducta A E ſit æqualis B I: erit punctum E in eadem parabola cuius ſit vmbilicus A, & vertex F.

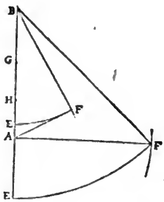


Hoc autem facilè patet ex 17 huius, vbi propter æquales A D, D C, & perpendicularem D E, recta A E rectæ C E, hoc eſt B I, vt hîc, eſt æqualis: & punctum E in eadem parabola vmbilico A, & vertice F deſcripta oſtenſum eſt. Attamen & hoc aliter ſic demonſtrabimus.

Sit enim primùm punctum I intra puncta A & F; erit quadratum B I æquale duobus B F, hoc eſt A F, & F I quadratis vnà cum duplo BFI, hoc eſt A F I, rectangulo. Sed quadrato A F æqualia ſunt bina A F I, F I A rectangula vnà cum quadrato I A, quorum F I A rectangulo vnà cum quadrato F I æquale eſt A F I rectangulum: igitur quadratum B I, hoc eſt A E quadratum, æquale eſt quadruplo A F I rectangulo vnà cum quadrato I A. Ablato igitur vtrinque I A quadrato, erit reliquum E I quadratum reliquo quadruplo A F I, hoc eſt I F in quadruplam F A, rectangulo æquale. Exiſtente autem puncto I in F A producta; erit rurſus quadratum B I duobus B F, hoc eſt A F, & F I quadratis vnà cum duplo B F I, hoc eſt A F I, rectangulo. Sed quadrato F I æqualia ſunt ambo A F I, F A I rectangula vnà cum quadrato A I, quorum F A I rectangulo vnà cum quadrato A F æquale eſt rectangulum A F I: quadratum igitur B I, hoc eſt A E, rurſus quadruplo A F I rectangulo vnà cum quadrato A I eſt æquale. Ablato igitur vtrinque quadrato A I, erit reliquum I E quadratum reliquo quadruplo AFI rectangulo æquale. Quare, vtrouis caſu, poſita AF axis portione vertice paraboles & vmbilico intercepta, erit quadrupla AF rectæ parametro æqualis, ideoque & recta E I, per 10 primi huius, à ſectione ad axem ordinatim ducta. Punctum igitur E erit in eadem ſectione ſiue parabola cuius ſit Vmbilicus A, & vertex F. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROP. XXIII.

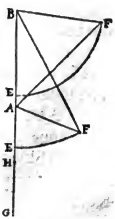
Si ſit data quæcunque recta linea AB ſecta non bifariam in H: ſitque AH minor quàm HB, & ipſi æqualis ponatur HG: ſumpto autem in HA, vel in ipſa producta, quolibet puncto E, deſcriptum centro B, interuallo BE, circuli arcum EF ſecet in F deſcriptus centro A, interuallo EG, arcus: erit punctum F in eadem hyperbola cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.



Ductis enim AF, BF: quoniam BF æquatur EB, & AF æquatur EG, ſuperat BF rectam AF quantitate rectæ BG. Poſitis igitur A, B hyperboles vmbilicis, & vertice H, erit, propter æquales HA, HG, reliqua BG eiuſdem hyperboles axi tranſuerſo æqualis. Quare BF recta rectam AF quantitate axis tranſuerſi ſuperabit. Et propterea, ex demonſtratis in 51 primi huius, rectæ AF, BF ab vtroque vmbilico ad idem ſectionis punctum oſtendentur inclinatæ. Quare & F punctum in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XII. PROP. XXIIII.

Si ſit data recta linea quæcunque AB producta in H: & ipſi AH æqualis in directum apponatur HG: ſumptoque quolibet interuallo BE, maiori quidem quàm AH, minori verò quàm BH, deſcribatur circuli arcus EF quem centro A, interuallo EG, deſcriptus arcus ſecet in F: erit punctum F in eadem ellipſi cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H.



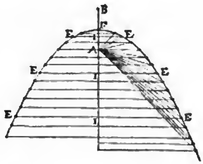
Ductis enim AF, BF: quoniam BF æquatur BE, & AF æquatur EG, erunt rectæ AF, BF ſimul rectæ BG æquales. Poſitis igitur A, B ellipſeos vmbilicis, & vertice H, erit, propter æquales HA, HG, compoſita recta BG eiuſdem ellipſeos axi tranſuerſo æqualis: quare & ambæ AF, BF ſimul eidem tranſuerſo axi erunt æquales: ideoque & per demonſtrata in 51 primi huius, eædem AF, BF rectæ ab vtroque ellipſeos vmbilico ad idem ſectionis punctum oſtendetur inclinatæ. Quare & punctum F in eadem erit ſectione, ſiue

ellipſi, cuius ſint vmbilici A, B, & vertex H. Quod erat demonſtrandum. *Hinc*

GENERALIS METHODVS V.

PROBL. XIII. PROP. XXV.

Datis, poſitione, paraboles vmbilico, & vertice; parabolem per puncta quotlibet in eodem plano promptè deſcribere.

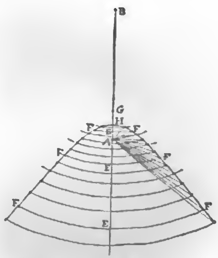


Sit A datus paraboles vmbilicus, & F eiuſdem vertex.

Iuncta A F producatur ad B, vt ſit F B æqualis A F, & ad partes A producatur quantùm opus. Axis igitur paraboles erit F A. Sumptis itaque in F A quotlibet punctis, vt I, excitentur totidem ipſi F A perpendiculares, vt I E, quas centro A, interuallo quo vnaquæque diſtat à B, vt B I, deſcripti arcus ſecent, vt in E: erunt, vt in 22 huius, puncta huiuſmodi, vt E, in eadem parabola cuius ſit vmbilicus A, & vertex F. Quare ſi eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XIIII. PROP. XXVI.

Datis, poſitione, hyperboles vmbilicis, & vertice; hyperbolem in eodem plano per puncta quotlibet promptè deſcribere.



Sint dati hyperboles vmbilici A, B, & H vertex.

Iuncta igitur A B tranſibit per H. Ponatur itaque H G æqualis H A: & in ipſa H A, etiam ſi opus producta, ſumantur quotlibet puncta, vt E, per quæ centro B deſcribantur arcus totidem, vt E F, quos centro A, interuallo quo vnumquodque reſpondens punctum ab ipſo G puncto diſtat, vt E G, deſcripti arcus etiam totidem ſecent, vt in F: erunt, vt in 23 huius, eiuſmodi inuenta interſectionum puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola cuius erunt

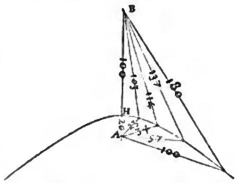
Digitized by Google

vmbilici A, B, & vertex H. Quare ſi eadem puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM I.

Nonnunquam fortè compendioſum fuerit in numeris hoc problema experiri: hac ratione.

Sint dati A, B vmbilici, & H hyperboles vertex: ſitque ratio BH ad HA in numeris data, vt 100 *ad* 20: *erit ambarum differentia* 80 *numerus axi tranſuerſo debitus. Quare ſi arcum centro A interuallo* 23 *partium deſcriptum ſecet arcus centro B interuallo partium* 103 *deſcriptus: ſimiliter & deſcriptos arcus interuallis* 34, 57, 100, *aut quotlibet plurium partium ſecent arcus centro B, & radijs* 114, 137, 170, *aut reſpondentium pari exceſſu, ſupra* 100 *&* 20, *partium deſcripti; erunt interſectionum puncta omnia in eadem hyperbola quæſita æquabili manus ductu per eadem deſcribenda.*



COMPEND. II.

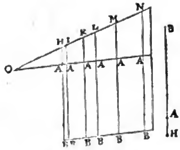
Sed non data ſit ratio BH ad HA in numeris. Sumpta ambarum differentia pro axe tranſuerſo ſectionis, æſtimabitur HA, vel etiam axis, quotlibet partium: & facto æquali vtrinque incremento, per arcum ab vtroque vmbilico deſcriptorum interſectiones dabuntur puncta per quæ quæſita hyperbola deſcribenda erit.

COMPEND. III.

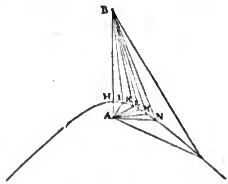
Abſque numeris etiam hæc poſtrema ratio ſatis compendioſa erit qua hyperboles axis etiam manebit indiuiſus.

Sint dati, vt ſupra, vmbilici A, B, ſectioniſque vertex H. Exponatur ſeorſim eadem recta BH, in qua ſumatur & HA datæ æqualis: ductæque AO quomodocunque, & ad partes A. producta,

producta, occurrat in O recta quæpiam HO quæ & ad partes H producatur: eidemque OA æquidiſtans per B ducatur BB: ductis iam quocunque interuallo rectis ipſi BH æquidiſtantibus, erunt rectæ lineis OH & OA productis interceptæ, vt AI, AK, AL,



AM, &c. Interualla arcuum citimo vmbilico A deſcribendorum arcus vmbilico B & interuallis BI, BK, BL, BM, &c. deſcriptos interſecantium. Quorumquidem arcuum interſectiones erunt ipſa L, K, M, &c. puncta viam quæſitæ hyperbolæ ducendæ deſignantia. Quod è ſupra demonſtratis facile conſtat. Quare & problemati hac ratione ſatisfactum erit.

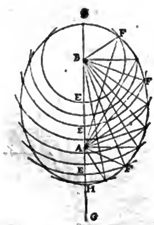


PROBL. XV. PROP. XXVII.

Datis, poſitione, ellipſeos vmbilicis, & vertice alterutro; ellipſim in eodem plano per puncta quotlibet deſcribere.

Sint dati vmbilici A, B, & H ellipſeos vertex.

Iuncta igitur AB & producta tranſibit per H. Poducatur: & ipſi AH æqualis in directum apponatur HG centroque B & interuallis quibuſcunque, majoribus tamen quam AH, & minoribus quam BH, vt BE, deſcribantur arcus, vt EF, quos interuallo quo vnuſquiſque à puncto G diſtat, vt GE, alij arcus deſcripti ſecent, vt in F: erunt, ex 24 huius, interſectionum puncta omnia, vt F, in eadem ellipſi cuius erunt vmbilici A, B, & vertex H. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

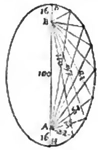


COMPENDIVM I.

Habet ſua compendia hæc methodus pro ellipſi deſcribenda.

Digitized by Google

Sint dati ellipſeos deſcribendæ vmbilici A, B, & vertex vterque H, D. Dataque ſit primùm ratio HA ad AB, nempe 16 ad 100: erit igitur axis tranſuerſus partium 132. Quare ſi arcus centro B, interuallis 110, 97, 81, & aliarum ſupra 16, & infra 116, partium deſcriptos ſecent alij centro A interuallis 22, 35, 51, aut aliarum reſpondentium ad numerum 132 reſiduarum partium, arcus deſcripti: erunt interſectionum puncta in quæſita ellipſi per eadem deſcribenda.

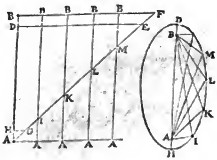


Non ſit autem data ratio HA ad AB in numeris. Nihilominùs ſi poſito ellipſeos deſcribendæ axe 100, aut quotlibet partium, arcus hinc inde ab vmbilicis deſcribantur ſub interuallis partium ſimul aſſumpto numero æqualium: hac tamen cautione vt vtrumque interuallum ſigillatim excedat HA, & à BH deficiat; erunt eadem ratione arcuum interſectiones in quæſita ellipſi per eaſdem delineanda.

COMPEND. II.

Abſque numeris etiam hac methodo compendioſè ellipſis per puncta deſcribetur manente eiuſdem axe indiuiſo.

Sint dati, vt ſupra, vmbilici A, B, & axis HD. Exponatur ſeorſim recta AB æqualis HD: ductaque quomodocunque per B recta BB, ducatur per A ipſi æquidiſtans recta AA: interque ipſas incidat quomodocunque recta AF: tum ſumptis in AB recta duobus D & H punctis eiuſmodi vt BD, HA ſint datis æquales: ipſis AA, BB rectis æquidiſtantes ducentur rectæ DE, HG occurrentes rectæ AF in G & E: ſumenturque in EG quotlibet puncta, vt I, K, L, M, &c. per quæ æquidiſtantes ipſi AB ducentur BIA, BKA, BLA, BMA, &c. quarum partes ad B interualla erunt arcuum vmbilico B deſcribendorum, & partes ad A radij erunt arcuum ex vmbilico A priores interſecantium: vt appoſita figura ſit manifeſtum. Quare & hac etiam ratione problemati ſatisfiet.

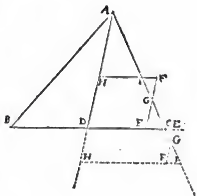


Digitized by Google

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XIII. PROP. XXVIII.

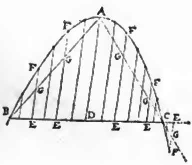
Si ſit triangulum quodcunque B A C, eiuſque baſis B C ſecta ſit bifariam in D: atque in B D, aut D C, vel etiam in ipſis productis, ſumatur quodcunque punctum E, à quo ductæ A D parallela educatur E F ſecans A B, aut A C, ſi opus eſt productas, in puncto G: & vt B D ad D E, ita fiat E G ad G F: erit punctum F in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.



Ducta enim F H parallela B C quæ ſecet A C, aut A B, in I: erit vt B D, vel D C, ad E D, vel F H, ita E G ad G F: & ita E C ad F I: quare & ita erit reliqua, vel compoſita, E D, hoc eſt F H, ad reliquam, ſiue compoſitam, I H. Quare, ex 1 huius, erit punctum F in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XVI. PROP. XXIX.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam in plano per puncta deſcribere.



Sit datum B A C triangulum.

Secetur baſis B C bifariam in D: ductæque A D à quotlibet ſumptis in B D, vel D C, punctis E, æquidiſtantes totidem educantur E G ſecantes A B, vel A C, in G: & vt B D ad D E ita fiat E G ad G F. Palam eſt, ex antecedente, eiuſmodi inuenta puncta omnia, vt F, in eadem fore parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabola circa triangulum B A C per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

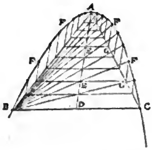
Commodum fortè & compendioſum fuerit, ſi componendo, vt

BD ad BE, ita fiat EG ad EF: ne breuior alioquin GF nonnunquam ſenſum fugiat.

Aliter, & ad Mechanicam aptius.

Probl. XVII. Prop. XXX.

Circa datum triangulum parabolam in eodem plano per puncta deſcribere.



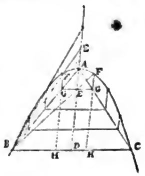
Sit datum BAC triangulum.

Secta baſi BC bifariam in D: in ducta AD ſumantur quotlibet puncta E, per quæ baſi BC parallelæ totidem ducantur EG ipſis AB, AC occurrentes in G: tum ductis à puncto B per ſingula in AD puncta rectis BE, occurrant in F ductæ per G ipſi AD parallelæ GF: erunt, vt in antecedente, ex 28 huius, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit: quare & per eadem continuata circa BAC triangulum erit deſcrîpta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

Compendioſum ſatis erit, ſi diuiſa AD in quotlibet partes æquales, in totidem æquales diuidatur vtraque BD, DC. Namque eductis à ſingulis in BD, & DC punctis ipſi AD parallelis, ſi ab vtroque B & C puncto per ſingula reſpondentia in A, D puncta ductæ rectæ occurrant in F; erunt occurſuum puncta F, vt ſupra, in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit.

Sed nec omittendum videtur, ſi in producta AD verſus A ſumantur partes factis in AD partibus æquales: & ab vnico B, aut C, puncto ad ipſarum ſingulas ductæ lineæ reſpondentibus eductis ipſi AD parallelis occurrant; etiam occurſuum puncta fore in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit. Producta enim vtraque FG in H, erit vtrinque DE, ſiue HG, ad HF, veluti BD ad BH: vt in anteced. comp.

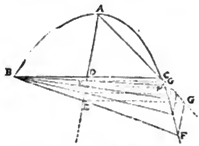


Probl. XVIII.

PROBL. XVIII. PROP. XXXI.

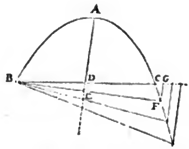
Parabolæ portionem per puncta quotlibet vlteriùs producere.

Sit parabolæ portio B A C quam oporteat vlteriùs verſus C producere.



Iungatur B C, & bifariam ſecetur in D: ductaque & producta diametro A D, iungatur A C, & producatur: tum ſumptis in A D producta quotlibet punctis, vt E, ducantur totidem ipſi B C parallelæ E G occurrentes productæ A C in G: & ductis per B, & per ſingula ſumpta in A D producta puncta, rectis B E occurrant ductæ à ſingulis in A C producta punctis G rectæ G F: erunt occurſuum puncta omnia, vt F, in eadem B A C parabola. Hoc enim ex 28 huius etiam facilè conſtat. Quare ſi huiuſmodi inuenta puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit per eadem parabolæ B A C portio continuata. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

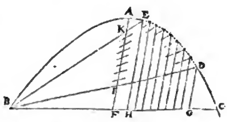


Magis compendioſa fortè videbitur methodus hac ratione. Diuiſa nempè vtraque AD, DC in totidem partes æquales, ſumantur in producta BC quotlibet partes ipſius DC: atque etiam in producta AD totidem ipſius partes: ductiſque à puncto B per ſingula in AD producta ſignata puncta rectis, vt BE, occurrant à reſpondentibus in DC producta punctis ipſi AD parallelæ ductæ, vt GF, in F: namque, ex ſupra oſtenſis, erunt eiuſmodi puncta, vt F, in eadem parabola quæ per B, A, C tranſit.

PROBL. XIX. PROP. XXXII.

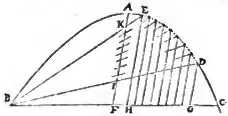
Datæ parabolæ mutilæ hiatum per quotlibet intermedia puncta reſarcire.

Sit propoſita B A C parabola mutila portione D E quam oporteat per puncta quotlibet reſtituere.



Ducatur diameter quæcunque A F: & ad ipſam à quocunque, vt B, puncto ordinatim ducta B F C, ducantur ipſi A F æquidiſtantes

E H, D G: iunctæ autem B E, B D ſecent ipſam A F in K & I: diuiſa igitur G H in quotlibet partes æquales, in totidem æquales etiam ſecetur I K: atque eductis à ſingulis in G, H punctis ipſi A F parallelis occurrant à puncto B per ſingula in I, K reſpondenti puncta ductæ lineæ: erunt occurſuum puncta in continuata B A C parabola. Illud enim ducta A C



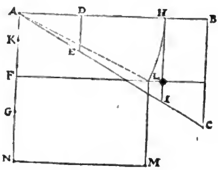
à parallelis ſecta eodem modo quo ſupra demonſtrabitur. Quare per inuenta huiuſmodi puncta continuata ſectio hiatu carebit. Quod erat propoſitum.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XIIII. PROP. XXXIII.

Si ſit triangulum quodcunque B A C rectangulum ad B: & à quolibet in A B ſumpto puncto D erigatur perpendicularis D E occurrens A C in E: atque à puncto A erigatur perpendicularis A F æqualis A D, & producatur in G, vt ſit F G æqualis D E: ſumptoque in D B, vel etiam in ipſa producta, quolibet puncto H, erigatur perpendicularis H I occurrens A C in I: & centro A, interuallo A H, deſcripta circumferentia parallelam ipſi A B à puncto F ductam ſecet in L: erigaturque perpendicularis L M, quæ ponatur æqualis H I; erit punctum M in hyperbola, cuius vertex erit G, & dupla F G axis tranſuerſus ad quem recta parameter ſe habebit, vt A B quadratum ad B C quadratum.

A puncto enim M cadat ad A G, ſi opus eſt productam, perpendicularis M N: & in F A, etiam ſi opus eſt producta, ſumatur F K æqualis F G. Quoniam igitur vt A B ad B C, ita eſt A D ad D E, hoc eſt A F ad F G: & ita A H ad H I, hoc eſt A L ad L M: erit vt A B quadratum ad B C quadratum, ita



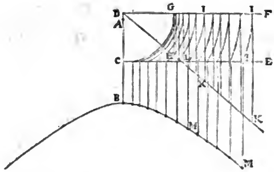
A F quadratum ad F G quadratum: & ita A L quadratum ad L M, ſiue F N, quadratum: ideoque & ita reliquum F L, ſiue M N, quadratum ad reliquum K N G rectangulum. Exiſtente autem G hyper-

Digitized by Google

boles vertice, atque GN axe intercepto, & centro F; erit KG tranſuerſus axis: poſitaque eiuſdem ad rectam parametrum ratione eadem quæ BC quadrati ad BA quadratum; erit, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, perpendicularis MN à ſectione ad axem ordinatim applicata. Quare punctum M in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius erit vertex G, & axis tranſuerſus KG, ad quem ſe recta parameter habebit, vt AB quadratum ad BC quadratum. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XX. PROP. XXXIV.

Datis hyperboles axe tranſuerſo, & eiuſdem ad rectam parametrum ratione; hyperbolem per puncta quotlibet in plano delineare.



Sit data recta AB quęſitæ hyperboles axis tranſuerſus, eiuſque ad rectam parametrum ratio eadem quæ R ad S.

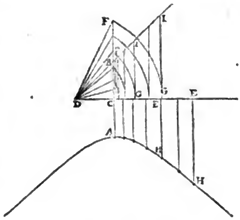
Secetur bifariam AB in C: & vt R ad S, ita fiat BC quadratum ad CD quadratum: eriganturque perpendiculares CE, DF productæ quantum opus: ſumptaque DG æquali DC, erigatur perpendicularis GH æqualis AC, vel CB: iunctaque DH producatur etiam quantum opus: & ſumptis in GE quotlibet punctis, vt I, erigantur totidem perpendiculares, vt IK, occurrentes CE in K: & totidem à puncto D interuallis, vt DI, centro D deſcribantur arcus ſecantes CE, vt in L, vnde perpendiculares erectæ, vt LM, fiant reſpondentibus, vt IK, perpendicularibus æquales: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt M, in eadem hyperbola cuius vertex erit B, & axis tranſuerſus AB ſe ad rectam parametrum habens vt BC, ſiue HG, quadratum ad CD, ſiue GD, quadratum: hoc eſt vt R ad S. Quare ſi inuenta hujuſmodi puncta omnia ęquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod faciendum erat.

MONITVM.

Quoniam hæc methodus operoſior nonnihil nobis viſa eſt, quæ tamen ipſam quam-proximè naturam imitatur, vt vnicuique accuratius ipſam ſpeculanti liquidò conſtabit: ideoque neque temerè à nobis fuit omittenda: non fruſtra factum iri duximus ipſam ad compendium aliquod reuocare. Itaque & ad ipſum alterum hoc ſequens theorema concipietur eiuſmodi.

Digitized by Google

vt D G, interualla: erectiſque totidem, vt G I, perpendicularibus quarum termini, vt I, ſint in recta D B producta, erigantur totidem perpendiculares, vt E H, ipſis, vt G I, perpendicularibus æquales: erunt, ex antecedente, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt H, in eadem hyperbola cuius ſit vertex B, & axis tranſuerſus A B, eiuſdemque ad rectam parametrum ratio eadem quæ B C, quadrati ad C D quadratum: hoc eſt quæ R ad S. Quare ſi eadem puncta omnia ęquabili manus ducta curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano pro puncta deſcripta. Quod faciendum erat:

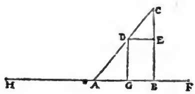


Ad ſpecialem pro ellipſi methodum.

THEOR. XVI. PROP. XXXVII.

Si ſit triangulum quodcumque A B C rectangulum ad B: & à quolibet in A C puncto D ducatur DE parallela AB, ocurrenſque B C in E: productaque A B in F, fiat A F æqualis A C; erit punctum E in ellipſi cuius dupla A F erit axis maior, minorque duplæ A D æqualis.

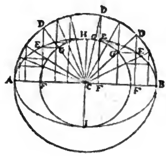
Cadat enim perpendicularis D G: & F A producatur in H, vt ſit A H æqualis A F. Quoniam igitur vt AC, hoc eſt A F, ad C B, ita eſt A D ad D G, hoc eſt EB: &, permutando, vt A F ad A D, ita eſt C B ad EB: erit vt A F quadratum, hoc eſt H A F rectangulum, ad A D quadratum, ita C B quadratum, hoc eſt H B F rectangulum, ad B E quadratum. Poſita igitur H F ellipſeos extrema maiore diametro, & A D eiuſdem minoris dimidio æquali, & centro A, erit perpendicularis E B à ſectione ad H F maiorem axem ordinatim, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, applicata. Quare punctum E, in eadem erit ellipſi cuius dupla A F axis erit major, & minor duplæ A D æqualis. Quod erat demonſtrandum.



Ee

PROBL. XXII. PROP. XXXVIII.

Datis ellipſeos extremis diametris; eandem in plano per puncta quotlibet deſcribere.



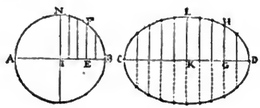
Sint datæ A B maior, & H I minor quæſitæ ellipſeos extremæ diametri, ſiue axes, bifariam ſeſe & ad rectos in C ſecantes angulos: ſin autem, ita componantur.

Centro C, interuallis C B, C H, deſcribantur circulorum circumferentiæ quas è communi C centro educti quotlibet radij, vt C D, ſecent, vt in G, & D: atque à punctis in maiori circumferentia factis, vt D, ad A B diametrum perpendiculares demittantur, vt D F, quibus à reſpondentibus in minori circumferentia punctis, vt G, ductæ ipſi A B æquidiſtantes occurrant, vt G E, in E: erunt, ex antecedente, occurſuum puncta, vt E, in eadem ellipſi quæ per puncta A, H, B, I tranſit: hoc eſt cuius erit A B axis maior, & H I axis minor. Quare ſi inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea æquabili manus ductu; erit illa ellipſis quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

ALITER.

PROBL. XXIII. PROP. XXXIX.

Ijſdemmet datis; ellipſim deſcribere.



Sit A B axis minor, & C D axis maior.

Circa diametrum A B deſcriptæ circuli circumferentiæ occurrant à ſingulis diuiſæ in partes æquales diametri A B punctis eductæ perpendiculares, vt I N, E F: (ſatis autem fuerit ſi à dimidia A B, hoc eſt I B, ſint eductæ) & diuiſa C D in totidem æquales partes, à ſingulis perpendiculares educantur reſpondentibus ſingulis ab A B diametro eductis, & circumferentia terminatis æquales, vt K L, G H: erunt omnium termini, vt L, H in eadem ellipſi cuius erit C D axis maior, & minor axis ipſi A B æqualis.

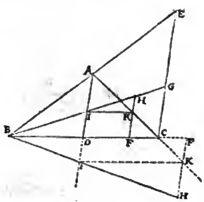
Sint enim ſectæ bifariam A B in I, & C D in K, ideoque & erecta K L æqualis A I, vel I B, hoc eſt I N: erit vt C D ad A B, ita C G ad A E: & ita G D ad E B: quare vt C D quadratum ad A B quadratum, ita erit C G D rectangulum ad A E B rectangulum. Igitur vt

CKD rectangulum ad AIB rectangulum, hoc eſt KL quadratum, ita erit CGD rectangulum ad AEB rectangulum, ſiue EF, aut GH, quadratum. Exiſtente igitur CD tranſuerſo axe erit HG perpendicularis ad ipſum à ſectione ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi quæ per puncta C, L, D tranſit. Quare ſi inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea; erit illa ellipſis in plano deſcripta. Sed & datis quibuſlibet coniugatis ellipſeos diametris non aliter ellipſis per puncta deſcribetur & deſcripta oſtendetur. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XVII. PROP. XL.

Si ſit triangulum quodcunque ABC, cuius baſis BC ſecta ſit bifariam in D: ductæque AD æquidiſtans ab alterutro baſis termino, vt C, educatur CE occurrens productæ BA in E: ſumptoque in DC, vel etiam in ipſa producta, quolibet puncto F, vt DC ad CF, ita fiat EC ad CG: iunctæque BG, productæ vbi opus, occurrat in H ducta à puncto F ipſi AD æquidiſtans FH; erit punctum H in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit.



Secet enim BG rectam AD in I: & FH rectam AC in K: iungaturque IK. Quoniam igitur eſt vt DC ad CF, ita EC ad CG: & vt DC ad CF, ita eſt DA ad FK: vtque EC ad CG, ita eſt AD ad DI: erit DI æqualis FK: & IK parallela & æqualis DF. Sed vt BD ad DI, hoc eſt FK, ita erit IK, hoc eſt DF, ad KH: quare, permutando, vt BD ad DF, ita erit FK ad KH. Punctum igitur H, ex 28 huius, erit in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

CONSECT.

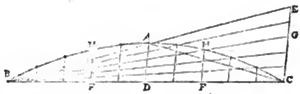
Hinc ſequitur Si diuiſa DC in quotlibet partes æquales, in totidem æquales diuidatur EC: & à ſingulis in DC punctis eductæ ipſi AD parallelæ occurrant ductis à puncto B ad ſingula reſpondentia in EC puncta; omnium occurſus in eadem fore parabola quæ per B, A, C tranſit.

Digitized by Google

Idemque eueniet Si, ſumptis in vtraque DC & EC binis punctis eiuſmodi, vt ſit eadem vtrinque partium ab ipſis factarum inuicem ratio, rectæ aſſumpta puncta interiacentes in æquales quotlibet partes vtrinque diuidantur: ductiſque rectis à puncto B ad ſingula in EC ſignata puncta occurrant eductæ à ſingulis in DC reſpondentibus punctis ipſi AD æquidiſtantes.

PROBL. XXIIII. PROP. XLI.

Circa datum quodcunque triangulum parabolam per puncta deſcribere.

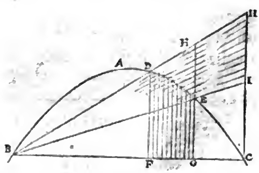


Sit triangulum BAC datum, circa quod oporteat parabolam per puncta deſcribere.

Secta baſi BC bifariam in D, ducatur AD, cui æquidiſtans educatur CE occurrens productæ BA in E: tum diuiſa DC in æquales quotlibet partes, in totidem etiam æquales diuidatur CE: & à ſingulis in DC punctis, vt F, educantur ipſi AD æquidiſtantes, vt FH, quibus occurrant ductæ à puncto B ad ſingula reſpondentia in CE puncta vt, BG, in H: erunt, ex antecedente, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt H, in eadem parabola quæ per puncta B,A,C tranſit. Quare ſi diuiſa BD etiam in totidem partes à ſingulis in ipſa punctis educantur ipſi AD æquidiſtantibus æquales, earumque termini vna cum inuentis punctis æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabole quæſita circa triangulum BAC per puncta deſcripta. Quod facere opportebat.

PROBL. XXV. PROP. XLII.

Datæ parabolæ mutilæ defectum per intermedia puncta reſarcire.



Sit parabola BAC mutila in DE.

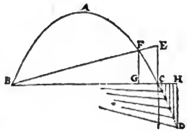
Ducantur diametro æquidiſtantes DF, EG: ductiſque & productis BD, BE occurrat in H & I recta CH ipſis DF, EG æquidiſtans: vel etiam producta GE occurrat BD productæ in H: tum diuiſa FG in quotlibet æquales partes, in totidem æquales diuidatur EH, vel HI: & ductis per B ad ſingula in EH, vel HI puncta rectis occurrant eductæ à ſingulis in FG

reſpondentibus

reſpondentibus punctis ipſis D F, E G æquidiſtantes: erunt occurſuum puncta omnia in eadem parabola quæ per puncta B, A, D, E, C tranſit. Quare ſi eadem æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit D E defectus per ipſam reſtitutus. Quod facere oportebat.

PROBL. XXVI. PROP. XLIII.

Parabolæ portionem deſcriptam vlterius per puncta producere.

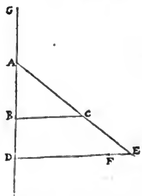


Sit deſcripta parabolæ portio B A C quam oporteat ad partes C producere. Ducatur CE æquidiſtans diametro, & producatur quantùm opus: iunctaque BE ſectioni occurrat in F: & ducta FG parallela CE, producatur BC in H, vt CH ſit æqualis CG: productaque EC in I, vt ſit CI ipſi æqualis, diuidatur CH in quotlibet partes æquales, & in totidem æquales diuidatur CI: tum eductis à ſingulis in CH punctis ipſi CI parallelis occurrant ductæ à puncto B ad ſingula in CI reſpondentia puncta rectæ, vt in D: erunt, ex eadem 40 huius, occurſuum puncta omnia, vt D, in eadem B A C parabola. Quare & per eadem erit B A C portio continuata. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XVIII. PROP. XLIIII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC: productiſque AB, AC quantumlibet, ſumatur in AB producta punctum quodlibet D per quod agatur DE parallela BC: ſumaturque in DE recta DF cuius quadrato plus poſſit DE quàm BC: erit punctum F in hyperbola, cuius ſit vertex B, & dupla AB tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum ſe habens vt AB quadratum ad BC quadratum.

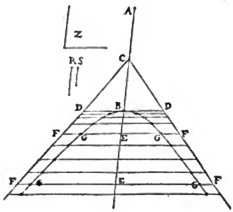


Producatur DA in G, vt ſit AG æqualis AB. Quoniam igitur vt AB quadratum ad BC quadratum, ita eſt AD quadratum ad DE quadratum: vt eſt AB quadratum ad BC quadratum, ſcilicet vt ablatum ad ablatum, ita etiam erit reliquum GDB rectangulum ad reliquum DF quadratum. Poſita igitur BG hyperboles tranſuerſa diametro, & centro A, rectaque BC quæ poſſit quadrantem figuræ ad GB tranſuerſam diametrum factæ: erit vt CB quadratum ad BA quadratum, ita figura ad

B G quadratum : & ita parameter ad B G tranſuerſam diametrum. Quare &, ex coroll. 2. ad 13 primi huius, recta F D erit à ſectione ad B D diametrum ordinatim applicata. Punctum igitur F in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, cuius erit B vertex, & G B tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum ſe habens, vt A B quadratum ad B C quadratum. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXVII. PROP. XLV.

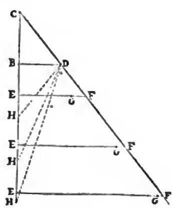
Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & eiuſdem ratione ad contiguam parametrum, in dato angulo; hyperbolem in plano per puncta quotlibet deſcribere.



Data ſit A B tranſuerſa hyperboles diameter, & eiuſdem ad contiguam in angulo Z dato parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Secetur A B biſariam in C: & vt R ad S, ita fiat C B quadratum ad B D quadratum: ſitque C B D angulus dato Z angulo æqualis: iuncta autem CD & producta, ſumantur in producta CB quotlibet puncta, vt E, per quæ totidem ipſi B D agantur parallelæ vſque ad C D productam, vt E F, à quarum ſingulis quadratis ablato B D quadrato, reliqui quadrati apponatur cuique ſuum, vt E G, latus: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt G, in hyperbola cuius ſit A B tranſuerſa diameter ad contiguam in dato A B D, ſiue Z, angulo parametrum ſe habens vt C B quadratum ad B D quadratum: hoc eſt vt R ad S. Quare ſi aſſignata huiuſmodi puncta omnia æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.



Hac autem ratione à ſingulis, vt EF, parallelarum quadratis quadratum B D commodè auferetur.

Ducta ſeorſim CB inſiſtat ad rectos eadem BD: productiſque CB, CD quantum opus, fiat DH æqualis EF, hoc eſt centro D interuallo EF deſcriptus circuli arcus ſecet CB productam in H: ſumptaque HB fiat æqualis EG in ſuperiori problematis figura: erit

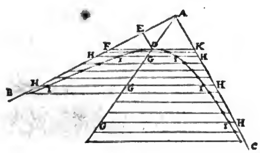
punctum G in eadem quæſita hyperbola. Eodemque modo & plura eiuſdem puncta alia facile inuenientur per quæ æquabili manus ductu deſcribetur.

MONITVM.

Hoc autem compendium eò vſque duntaxat inſeruiet, donec in ſequentibus è datis quibuſlibet coni ſectionum diametris earumdem axes facili methodo ſe exhibebunt: eaque ratione ipſum hoc problema ſuum tunc inde feret compendium: exiſtente ſcilicet angulo, ſub datis tranſuerſis diametris, & contiguis parametris contento, recto.

PROBL. XXVIII. PROP. XLVI.

Datis, poſitione, hyperboles aſymptotis, & puncto in ſectione; circa aſymptotos hyperbolem per puncta deſcribere.



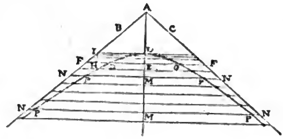
Sint datæ aſymptoti A B, A C, & punctum D quod ſit in quæſita hyperbola.

Ducatur A D, & producatur: fiatque D E parallela A C: & ſumpta E F æquali E A, iungatur F D, & producatur in K: ſumptiſque in A D producta quotlibet punctis, vt G, per ea æquidiſtantes totidem ipſi F K ducantur alterutra aſymptoto terminatæ, vt G H, à quarum quadratis ablato ſigillatim quadrato ex F D, reliqui quadrati ſingulis ſuum apponatur latus, vt G I: erunt, ex demonſtratis in 44 huius, acquiſita huiuſmodi puncta omnia, vt I, in eadem hyperbola quæ per D incedit, cuiuſque aſymptoti ſunt ipſæ A B, A C rectæ: ſiue cuius ſit D vertex, & dupla A D tranſuerſa diameter ad contiguam in angulo A D K parametrum ſe habens, vt A D quadratum ad D K, vel D F, quadratum. Quare ſi æquabili manus ductu eadem inuenta puncta omnia curua iungantur linea; erit illa hyperbola per puncta deſcripta problemati ſatisfaciens. Quod erat propoſitum.

Aliter, & magis compendioſe.

PROBL. XXIX. PROP. XLVII.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per puncta deſcribere.



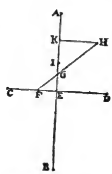
Sint datæ aſymptoti A B, A C, & punctum D quod ſit in quæſita hyperbola.

Secetur B A C angulus bifariam recta A E: & ad eam à puncto D perpendicularis ducatur D E, quæ, producta, aſymptotis A B, A C occurrat in F, & ſectioni in G: cuius autem quadrato plus poteſt recta EF quàm recta ED, vel EG, ſit recta EH: factaque HI parallela AE, & aſymptoto AB occurrens in I, ducatur ad AE perpendicularis IL: ſumptiſque in LE, vel in ipſa producta, quotlibet punctis, vt M, ipſi LI æquidiſtantes totidem ducantur alterutra aſymptoto terminatæ, vt MN: ſumaturque quadratorum MN, LI differentiæ latus MP: erunt, ex eadem 44 huius, acquiſita huiuſmodi puncta omnia, vt P, in eadem hyperbola quæ per D incedit, cuiuſque aſymptoti ſint AB, AC, & dupla AL axis tranſuerſus ad rectam parametrum ſe habens vt AL quadratum ad LI quadratum. Quare & ſic problemati ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

Ad ſpecialem pro ellipſi methodum.

THEOR. XIX. PROP. XLVIII.

Si ſint binæ quælibet inæquales rectæ lineæ AB maior, CD minor, bifariam ſeſe & ad rectos in E ſecantes angulos, in quas cadat recta FG æqualis dimidiæ inter vtramque differentiæ, quæ producta in H faciat FH æqualem AE; erit punctum H in eadem ellipſi quæ per puncta B, C, A, D tranſit.



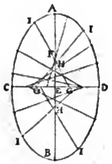
Sumatur AI æqualis ED: erit igitur IE æqualis FG. Cadat ab H ad AB perpendicularis HK: igitur vt EG ad GK, ita erit FG ad GH, hoc eſt EI ad IA: &, componendo, vt EK ad GK, ita erit EA ad IA, hoc eſt ad GH, vel ED. Igitur vt quadratum EK ad GK quadratum, ita erit AE quadratum ad GH, vel ED, quadratum: & ita reliquum BKA rectangulum ad reliquum HK quadratum. Poſitis igitur AB ellipſeos

axe

axe maiore, & CD eiuſdem minore, erit, ex 8 primi huius, recta HK à ſectione ad axem AB ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi, quæ per puncta B, C, A, D tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXX. PROP. XLIX.

Datis ellipſeos extremis diametris; ellipſim per puncta quotlibet in plano deſcribere.



Sint dati ellipſeos axes, ſiue extremæ diametri, AB, CD bifariam inuicem & ad rectos ſe ſecantes in E.

Sumpta AF æquali ED, ſumantur in recta FE puncta quotlibet, vt H, quibus vt centris circumferentiæ interuallo FE deſcriptæ ſecent CE, aut ED, in totidem punctis, vt in G: rectæque lineæ bina reſpondentia puncta iungentes, vt GH, producantur, vt in I, ita vt ſit HI æqualis AF, vel ED: erunt, ex antecedente, inuenta ſic puncta omnia, vt I, in eadem ellipſi quæ per puncta B, C, D, A tranſibit, hoc eſt cuius erunt AB, CD extremæ diametri. Quare ſi æquabili manus ductu eadem inuenta puncta curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

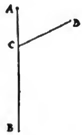
Suum etiam hæc methodus ſortietur compendium à circino tricruri, aut à canone, ſiue virga, cui cum in altero extremo inſiſtet acumen, inſuper duplex curſor vterque acuminatus aptabitur debito loco facilè firmandus. Cum enim acuminum interſtitia in directum firmata eadem fuerint, quæ, verbi gratia, G, H, I punctorum: duobus G, H in ipſis AB, CD diametris poſitis, & motis, reliquum I punctum ſemper in quæſita erit ſectione, ſiue ellipſi.

Digitized by Google

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XX. PROP. L.

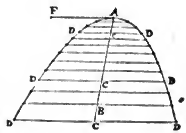
Si ſit recta quæpiam linea AB vtcunque ſecta in C: & eductæ quomodocunque CD quadratum fiat rectangulo ACB æquale; erit punctum D in parabola cuius erit A vertex, AC diameter, & CB ea iuxta quam poterunt à ſectione ad AC diametrum ordinatim ductæ, ſiue ſectionis parameter.



Patet enim hoc ex 7 primi huius, vbi ordinatarum quadrata rectangulis ſub interceptis à vertice & ea iuxta quam poſſunt, ſiue ſectionis parametro, oſtenduntur æqualia. Exiſtente igitur CB ſectionis parametro, A vertice, & AC intercepta diametro, erit DC recta à ſectione ad eandem AC diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum D erit in parabola cuius ſit vertex A, diameter AC, & CB ſectionis parameter. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXI. PROP. LI.

Datis, poſitione, diametro, & contigua parametro; paraboles portionem per puncta quotlibet in plano deſcribere.

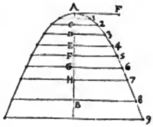


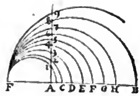
Sint datæ poſitione AB paraboles diameter, & AF eiuſdem parameter. Sumantur in AB, etiam quantumlibet producta, quotlibet puncta, vt C, à quibus totidem ipſi AF parallelæ ducantur, vt CD, quarum quadrata ſingula fiant ſingulis FAC rectangulis æqualia: erunt, ex antecedente, omnium termini, vt D, in eadem parabola cuius ſit vertex A, diameter AC, & contigua parameter AF. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa paraboles portio quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM.

Compendioſa reddetur hæc methodus hac ratione.

Digitized by Google



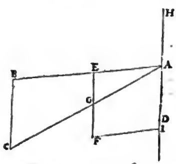


Datæ rectæ FA, AB ſeorſim in vnam componantur rectam cui in A perpendicularis inſiſtat AK: & diuiſa vtraque AB in totidem partes æquales, vt in C, D, E, inter FA & vnamquamque rectæ AB partem ipſi FA continuam, vt AC, AD, AE, mediæ proportionales ſumentur A2, A3, A4: (ipſæ autem mediantibus ſemicirculis ab ipſa AK perpendiculari facilè reſecabuntur) tum à ſingulis in AB diametro punctis parametro AF æquidiſtantes ducentur C2, D3, E4, &c. quæ ipſis A2, A3, A4, ſingulæ ſcilicet ſingulis reſpondentibus, fient æquales: namque & hac ratione erunt puncta 2, 3, 4, & quotlibet eiuſmodi alia in eadem parabola, cuius erit vertex A, diameter AC, & parameter AF.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

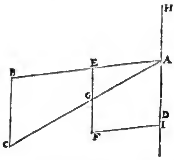
THEOR. XXI. PROP. LII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC: & à quolibet angulo A oppoſito BC lateri parellela agatur quæcunque AD: ſumptoque in AB, etiam quandolibet producta, quolibet puncto E, ducatur eidem BC parallela EF, quæ ſecet AC in G, & poſſit quadrato bina AD, EG quadrata; erit punctum F in hyperbola cuius vertex erit D, & dupla AD tranſuerſa diameter ad quam ſe habeat contigua parameter vt AB quadratum ad BC quadratum.



Sumatur in DA producta recta AH æqualis AD: ducaturque per F, ſi opus eſt productam, recta FI parallela AB. Erit igitur FI æqualis EA: atque AI æqualis EF. Et quoniam vt AB quadratum ad BC quadratum, ita eſt AE, ſiue FI, quadratum ad EG quadratum: eſtque EF, ſiue AI, quadratum duobus AD, EG quadratis æquale: itemque æquale eſt quadrato AD vna cum rectangulo HID:

ablato igitur communi A D quadrato, erit reliquum H I D rectangulum reliquo E G quadrato æquale. Igitur vt A B quadratum ad B C quadratum, ita erit F I quadratum ad rectangulũ H I D. Exiſtente igitur H D tranſuerſa hyperboles diametro & vertice D: poſitaque ratione H D tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum eadem quæ C B

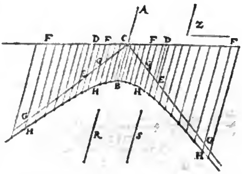


quadrati ad B A quadratum; erit recta F I à ſectione ad D I diametrum ordinatim applicata, per coroll. 2 ad 13 primi huius. Quare punctum F in eadem erit hyperbola cuius erit vertex D, & tranſuerſa diameter dupla A D ad quam ſe contigua parameter habeat vt A B quadratum ad B C quadratum. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXII. PROP. LIII.

Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & ratione eiuſdem ad contiguam parametrum in angulo dato; hyperbolem per puncta quotlibet in plano deſcribere.

Sit data A B tranſuerſa hyperboles diameter, & eiuſdem ratio ad contiguam in dato Z angulo parametrum eadem quæ R ad S.

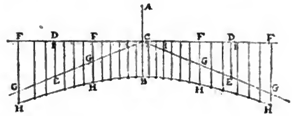


Secetur A B bifariam in C: & vt R ad S, ita fiat A C quadratum ad C D quadratum: ſitque A C D angulus dato Z angulo æqualis: ducaturque D E æquidiſtans & æqualis C B: Iunctaque A E producatur quantum opus: tum ſumptis in C D, etiam quando opus producta, quotlibet punctis, vt F, per ea totidem ipſi A B parallelæ agantur rectæ, vt FH, ſecantes CE in G, quarum quadrata ſingula ſint ſingulis F G quadratis vna cum C B quadrato æqualia: Erunt, ex antecedente, omnes parallelarum huiuſmodi termini in eadem hyperbola cuius ſit vertex B, & tranſuerſa diameter A B ſe ad contiguam parametrum habens vt A C quadratum ad C D quadratum, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi æquabili manus ductu acquiſiti huiuſmodi termini omnes curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita per puncta in plano deſcripta. Quod facere oportebat.

COMPENDIVM

Compendioſa ſatis forte videbitur hæc methodus, ſi ducta ſeorſim

ſim AB inſiſtat ad rectos eadem CD: & reliqua perficiantur eadem quæ iam expoſita ſunt: ductiſque FGH parallelis quotlibet, ſumatur FI æqualis CB:

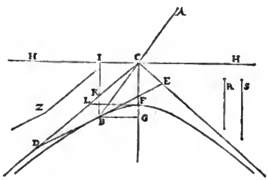


& ſumpta IG reponatur in FH. Nam rectæ FH ſit acquiſitæ facilè è rectangula hac figura in obliquangulam ſuperiorem transferentur.

ALITER.

Sed & aliter etiam hæc methodus ſuum ſumet compendium.

Sint datæ, vt ſupra, AB tranſuerſa diameter, & ratio eiuſdem ad contiguam parametrum eadem quæ R ad S: datuſque inclinationis ad inuicem angulus Z.

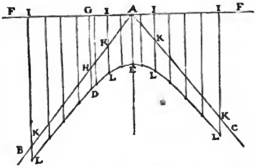


Secta bifariam AB in C, fiat CBD angulus æqualis dato Z angulo: & vt R ad S, ita fiat CB quadratum ad BD quadratum: productaq; DB in E, vt ſit BE æqualis BD: iungantur CD, CE, & producantur: tum ſecto DCE angulo bifariam recta CF, fiat BG ad CF perpendicularis, cui per C æquidiſtans ducetur CH: ductaque ad CH perpendiculari BI ſecante CD in K, ſumetur quadratorum BI, KI differentia cui æquale fiet quadratum ex CF: duceturque FL æquidiſtans CH: tum datis dupla CF axe tranſuerſo, & eiuſdem ad rectam parametrum ratione eadem quæ CF quadrati ad FL quadratum, è ductis CH & CL rectis puncta, per ſuperioris compendij methodum, comparabuntur per quæ æquabili manus ductu hyperbola facilè deſcribetur per datum B punctum tranſiens. Hinc & hoc adnectendum duximus problema ſequens.

Digitized by Google

PROBL. XXXIII. PROP. LIIII.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per puncta quotlibet in plano deſcribere.



Sint poſitione datæ aſymptoti A B, A C, punctumque in D ſectione.

Secetur B A C angulus bifariam recta A E, cui perpendicularis ducatur A F, & æquidiſtans D G ſecans A B in H: tum quadratorum D G, G H differentiæ æquale ponatur quadratum ex A E: & ſumptis in A F recta quotlibet alijs punctis, vt I, per ea totidem ipſi A E æquidiſtantes ducantur I K L ipſam A B, aut A C, ſecantes in K: & ſingulis I K quadratis vnà cum quadrato A E æqualia ponantur ſingula I L quadrata: erunt, ex 52 huius, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt L, in eadem hyperbola in qua & D punctum, cuiuſque ſit dupla A E tranſuerſus axis ſe ad rectam parametrum habens vt H G quadratum ad G A quadratum. Quare & intra aſymptotos A B, A C per eadem inuenta L puncta, & per ipſum D punctum quæſita hyperbola æquabili manus ductu facilè deſcribetur: & ſic problemati ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

Ad ſpecialem pro ellipſi methodum.

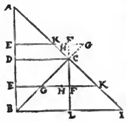
THEOR. XXII. PROP. LV.

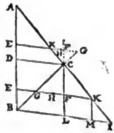
Si ſit triangulum quodcunque A B C, cuius latus A B bifariam ſectum ſit in D: iunctæque C D æquidiſtans & æqualis à quolibet in A D, aut D B, puncto E ducatur E F ſecans C B, aut eidem occurrens, in G: & quadratorum E F, F G differentiæ æquale ſumatur quadratum ex E H: ſiquidem A C B angulus eſt rectus; erit punctum H in circuli circumferentia, cuius erit diameter A B. Sin autem; erit idem punctum H in ellipſi quæ per puncta A, C, B tranſit, cuiuſque tranſuerſa erit diameter A B.

Producatur A C in I, vt ſit C I æqualis C A: iungaturque B I: & in quo E F ſecat A I, vel ipſi occurrit, ſit punctum K: Iunctaque C F producatur in L: ſitque primùm A C B angulus rectus. Igitur propter ęquales A D, D B, itemque A C, C I, erit & angulus A D C, hoc eſt A B I, rectus: & recta A B rectæ B I æqualis: ideoque & A E æqualis

Digitized by Google

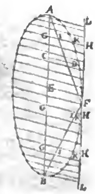
EK: & BE æqualis EG: quare & rectangulum KEG rectangulo AEB erit æquale. Sed, propter æquales eadem ratione BL, LI, ideoque & GF, FK, rectangulum KEG vnà cum quadrato FG, æquale eſt quadrato EF, hoc eſt quadrato FG vnà cum quadrato EH: ablato igitur communi FG quadrato, erit reliquum EH quadratum reliquo KEG, hoc eſt AEB, rectangulo æquale. Eſtque angulus AEG rectus: quare punctum H in circuli erit circumferentia. Non ſit autem ACB angulus rectus. Ducatur inſuper KM parallela AB. Igitur, propter æquales AC, CI, & æquidiſtantem CL, erit BL, hoc eſt EF, æqualis LI: atque etiam & GF æqualis FK, hoc eſt LM: quare & reliqua EG reliquæ MI erit æqualis. Sed quoniam vt AE ad EK, ita eſt KM ad MI, hoc eſt EB ad EG: erit, permutando, vt AE ad EB, hoc eſt vt AE quadratum ad AEB rectangulum, ita EK ad EG, hoc eſt ita EK quadratum ad KEG rectangulum: rurſuſque permutando, vt AE quadratum ad EK quadratum, hoc eſt vt AD quadratum, vel ADB rectangulum, ad DC quadratum, ita erit AEB rectangulum ad KEG rectangulum, hoc eſt, ex iam oſtenſis, ad quadratum EH. Exiſtente igitur AB ellipſeos tranſuerſa diametro, & CD dimidia eidem coniugata, erit, ex coroll. 2 ad 13 primi huius, recta HE ab eadem ſectione ad eandem AB diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum H in eadem erit ellipſi quæ per A, C, B tranſit, cuiuſque tranſuerſa diameter ſit AB. Quod erat demonſtrandum.





PROBL. XXXIIII. PROP. LVI.

Circa poſitione datas tranſuerſam diametrum & vnam ex ordinatim ad ipſam ductis ellipſim per puncta quotlibet deſcribere.



Sint poſitione datæ AB tranſuerſa diameter, & CD vna ex ordinatim ad ipſam ductis.

Secetur AB bifariam in E: ducaturque EF æquidiſtans CD: & vt ACB rectangulum ad CD quadratum, ita fiat AE quadratum ad EF quadratum: iunganturque AF, FB: tum ducta FL æquidiſtante AB, ſumptiſque in AB quotlibet punctis, vt G, per ea totidem ipſi EF æquidiſtantes ducantur, vt GH, occurrentes FL in H, ſecanteſque AF, aut FB, in I, à quarum ſingulis quadratis ablato IH quadrato, reliqui vnicuique, hinc inde ab AB, reponatur proprij, vt

G K, quadrati latus : erunt, ex antecedente, inuenta huiuſmodi puncta omnia, vt K, in eadem ellipſi quæ per puncta A, D, F, B tranſit, cuiuſque ſit AB tranſuerſa diameter. Quare ſi eadem inuenta puncta æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa ellipſis quæſita circa A B tranſuerſam diametrum & C D ordinatam per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

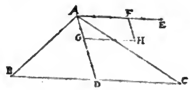
COMPENDIVM.

Huiuſce methodi compendium pendet è ſemicirculi ſuper E F, vel G H, aut ipſis æquali diametro, deſcriptione, in quo aptatis ſingulis ablatitiorum quadratorum lateralibus rectis, vt I H, fiet reliquæ circumferentiæ ſubtenſa debiti cuique quadrati recta lateralis, vt G K, è diametro G H reſecanda.

Ad ſpecialem pro parabola methodum.

THEOR. XXIII. PROP. LVII.

Si ſit triangulum quodcunque ABC, cuius baſis ſecta ſit bifariam in D : ductaque A D ducatur A E æquidiſtans & æqualis DC, & in quotlibet partes æquales diuidatur: perque numerum quadrato numeri partium in A E factarum æqualem diuidatur A D: ſumpta autem A F quotlibet partium ex AE, ſumatur, in AD, recta A G quadrato partium AF reſpondens : ductæque F H æquidiſtanti AD occurrat in H ducta G H æquidiſtans A E; erit punctum H in parabola quæ per B, A, C tranſit.



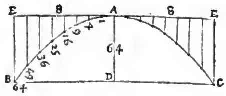
Quoniam enim A D reſpondet quadrato numeri partium A E, & A G quadrato numeri A F ; vt A D ad A G, ita erit A E, hoc eſt D C, quadratum ad AF, hoc eſt G H, quadratum. Quare poſita A D paraboles diametro, & A vertice, erit vtraque D C, G H ad ipſam A D diametrum à ſectione ordinatim applicata, ex 7 primi huius. Eſtque B D æqualis & in directum D C: punctum igitur H in eadem erit parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXV.

Digitized by Google

PROBL. XXXV. PROP. LVIII.

Circa poſitione datas diametrum & baſim, figuram parabolâ contentam per puncta quotlibet in plano deſcribere.

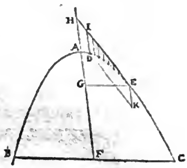


Sint poſitione datæ diameter AD, baſiſque BDC. Erit igitur BD æqualis DC.

Ducatur AE æquidiſtans & æqualis DC, & in partes quotlibet æquales ſecetur, vt in 8: ſeceturque AD, aut ipſi æqualis, in partes æquales 64: tum ductæ à ſingulis in AE diuiſionibus rectæ ipſi AD æquidiſtantes reſecentur ſingulæ ſecundùm numerum reſpondentis in AD quadrati, vt 1^a ſit vnius partis, 2^a quatuor, 3^a nouem, 4^a ſedecim, &c. qualium AD ſit 64: erunt, ductis AB, AC, ex antecedente, aſſignata eiuſmodi puncta omnia, ſiuè æquidiſtantium termini, in eadem parabola quæ per puncta B, A, C tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curva iungantur linea; erit illa parabolæ portio: ideoque & quæſita BAC figura circa AD diametrum & BDC baſim per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

PROBL. XXXVI. PROP. LIX.

Paraboles mutilæ hiatum per puncta quotlibet intermedia reſarcire.



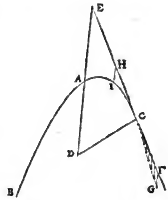
Sit parabola BAC hiatum habens in DE.

Ducta diametro quacumque AF, & ad eam ordinatim applicata BFC, ducatur EG parallela BC: factaque AH æquali AG, iungatur HE ad quam à puncto D ducatur DI æquidiſtans AF: ſectaque EI in quotlibet partes æquales, vt in 8, ſecetur & DI, aut ſecta intelligatur, in 64 partes etiam æquales, ſcilicet ſecundùm numerum quadrato numeri partium in EI factarum æqualem: tum ductæ à ſingulis in EI diuiſionibus ipſi AF diametro parallelæ reſecentur ſecundùm reſpondentes in DI quadratos numeros, vt 1^a ſit vnius qualium DI ſit 64, 2^a quatuor, 3^a nouem, atque ita conſequenter: erunt quippe omnium termini in eadem BAC parabola. Quod ducta EK æquidiſtante DI, & DK æquidiſtante IE, iunctaque DE, propter DEK triangulum, ex 57 huius, ſatis fit manifeſtum. Quare ſic problemati ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.

Digitized by Google

PROBL. XXXVII. PROP. LX.

Parabolæ portionem vlterius per puncta quotlibet producere.



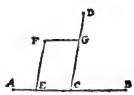
Sit parabolæ portio BAC quam oporteat vltra C producere.

Ducatur diameter quæcunque AD, & ad eam ordinatim applicetur CD: factaque AE æquali & in directum AD, iungatur EC, & producatur quantum opus, vt in F: ſumptaque CH æquali CF, ducatur ad ſectionem recta HI parallela AD, cui æqualis & parallela ducatur FG: diuiſa autem CF in partes quotlibet æquales, vt in 5, vel 6, æſtimabitur FG æqualium partium 25, vel 36: & à ſingulis in CF diuiſionum punctis ductæ diametro AD parallelæ reſecabuntur ſecundùm reſpondentes in FG numeros quadratos, facta ſcilicet 1ª & puncto C proxima vnius, 2ª quatuor, 3ª nouem, & ita deinceps: namque &, ex eadem 57 huius, erunt omnium termini in eadem BAC parabola continuata. Quare & per eadem ſic inuenta puncta æquabili manus ductu facilè continuabitur, & ſic problemati erit ſatisfactum. Quod facere propoſitum fuit.

Ad eiuſdem methodi compendium.

THEOR. XXIV. PROP. LXI.

Si ſit recta linea AB bifariam diuiſa in C: eductaque quomodocunque recta CD, diuidatur vtraque AC, CB in quotlibet partes æquales: ſumptaque AE earumdem quotlibet, educatur EF æquidiſtans CD: & qualium CD æſtimabitur numero quadrato partium in AC, aut CB, factarum, earumdem ſumatur pro recta EF numerus planus ſub partibus AE, EB factus; Erit punctum F in eadem parabola quæ per A, D, B puncta tranſit.

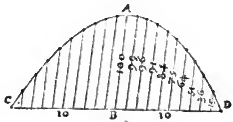


Ducatur enim recta FG æquidiſtans AB. Quoniam igitur qualium CD æſtimatur numero quadrato partium quæ in AC vel CB, hoc eſt plano ſub partibus in AC, CB factis, earundem & EF æquatur numero plano ſub partibus AE, EB; vt ACB planum, ſiue rec-

tangulum, hoc eſt A C quadratum, ad A E B planum, ſiue rectangulum, ita erit DC numerus ad FE, hoc eſt G C, numerum: & ita recta DC ad rectam GC: quare, per conuerſionem rationis, vt AC quadratum ad E C, hoc eſt F G, quadratum, ita erit recta D C ad rectam D G. Poſita igitur D C paraboles diametro, & D vertice, erit, per 7 primi huius, vtraque recta A C, F G, à ſectione ad eandem D C diametrum ordinatim applicata. Quare & punctum F in eadem erit ſectione ſiue parabola quæ per puncta A, D, B tranſit. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXVIII. PROP. LXII.

Circa poſitione datas diametrum & baſim, portionem parabola contentam per puncta quotlibet deſcribere.

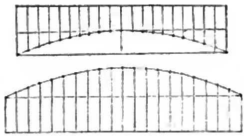


Sint datæ poſitione A B diameter, baſiſque recta C B D. Erit igitur C B æqualis B D.

Secetur vtraque CB, BD in partes quotlibet æquales, vt in 10, & à punctis ex diuiſione ortis educantur totidem ipſi A B æquidiſtantes: & qualium A B intelligetur tot partium quot in plano, ſiue quadrato, numero ſub partibus C B, B D factis vnitates continebuntur, earundem & vnaquæque æquidiſtantium ponatur tot quot planus numerus ſub partibus rectæ C D vtrinque ab ipſa interceptis conſtabit, hoc eſt prima ſeu diametro A B proxima ſit partium 99, ex ductu 11 in 9: ſecunda ſit partium 96, ex ductu 12 in 8: tertia ſit partium 91, ex ductu 13 in 7: ideoque & quarta ſit 84, quinta ſit 75, ſexta ſit 64, octaua 51, atque ita deinceps: erunt, ex antecedente, omnium termini in eadem parabola quæ per puncta C, A, D tranſit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa parabolæ portio circa A B diametrum & C D baſim per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

MONITVM AD COMPENDIVM.

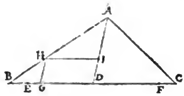
Monendus mihi lector hic viſus eſt magnum fore compendium ſi ad has ſectionum conicarum deſcriptiones opem conferat circinus analogicus ſiue proportionalis, ſed iuſto examine probatus. Sæpenumero enim eueniet vt diameter proponatur ita exigua, vt hic in parabola, quæ vix niſi eiuſdem circini ope in plures diuidi poßit partes. At mediante circino magna parallelarum ſylua educetur debitis numeris planis, in partibus qualium exigua diameter quadrato numeri omnium æſtimabitur, facile reſecanda. Cui compendio hoc inſuper addendum cenſemus, ſæpißime nos in deſcribendis huiuſmodi portionibus parallelogrammo ſubſtrato fulcri inſtar, vel etiam ſuperſtructo, vti, quo aptius rectarum reſecandarum partes circino applicentur, aut inde exportentur. Quod appoſita figura ſatis ſit manifeſtum.



Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

THEOR. XXV. PROP. LXIII.

Si ſit triangulum quodcumque ABC, in cuius alterutro latere, vt BC, bifariam ſecto in D bina E & F puncta æqualiter à media D ſectione remota ſumantur; erit vtrumque E & F punctum in eadem hyperbola ſpecie data.

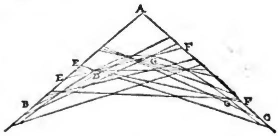


Ducatur enim AD: & rectangulo BEC æquale ponatur quadratum DG: atque à puncto G educatur GH parallela AD: agaturque HI parallela BC. Erit igitur HI quadratum quadrato GD, hoc eſt rectangulo BEC æquale. Quadratum autem BD æquale eſt quadrato DE vna cum rectangulo BEC: quare duobus HI, DE quadratis æquale erit quadratum BD. Quoniam autem in triangulo AIH productis AI, AH, à ſumpto in AI producta puncto D parallela acta eſt DB, in qua ſumpta eſt DE cuius quadrato plus

plus poteſt BD quam HI: erit punctum E, per 44 huius, in hyperbola cuius erit I vertex, & dupla AI tranſuerſa diameter ad contiguam in angulo AIH parametrum ſe habens vt AI quadratum ad IH quadratum. Punctum igitur E in certa erit hyperbola. Sed & idem de puncto F eodem modo demonſtrabitur. Vtrumque igitur E & F punctum in eadem erit hyperbola ſpecie data. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XXXIX. PROP. LXIV.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per quotlibet alia puncta deſcribere.



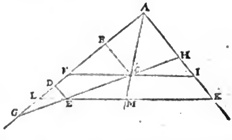
Sint datæ aſymptoti AB, AC, punctumque in ſectione D.

Ducantur per D rectæ quæcunque, vt EDF, vtraque aſymptoto terminatæ, vt in E, & F: & rectis puncto D & citima aſymptoto interceptis, vt ED, vel DF, ęquales ad alteram aſymptoton ſumantur, vt FG, aut EG: erunt, ex antecedente, eiuſmodi inuenta puncta omnia, ęqualiter & ab vtroque termino in aſymptoto, & à media ſectione remota, in eadem hyperbola cum puncto D. Atque ſi rurſus circa quodlibet aliud inuentum pręter D punctum idem problema exerceatur; erunt inuenta ſic quotlibet alia puncta per quæ eadem ſectio tranſibit. Quare ſi æquabili manus ductu curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita per quotlibet puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

Ad ſpecialem pro hyperbola methodum.

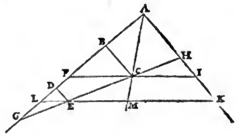
THEOR. XXVI. PROP. LXV.

Si ſit triangulum quodcunque ABC: & in producto vtrolibet eiuſdem latere, vt AB, ſumatur punctum quodlibet D, à quo ipſi BC parallela agatur DE: ſit autem rectangulo ABC æquale rectangulum ADE; erunt puncta E, C in eadem hyperbola ſpecie data.



Ducatur à puncto A ipſi BC parallela AK: ſumptaque BF æquali AB, ducatur FC, & producatur ad AK in I: eidemque per punctum E parallela agatur LEK coincidens AB in L, & ipſi AK in K, ſecanſque AC productam in M: iuncta autem EC & vtrinque producta occurrat AB

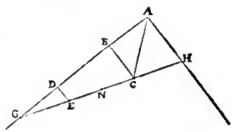
in G, & AK in H. Quoniam igitur rectangulo ABC æquale eſt rectangulum ADE: erit vt AB ad AD, ita DE ad BC, hoc eſt GD ad GB: &, diuidendo, vt AB ad BD, ita erit GD ad DB. Æqualis igitur erit GD ipſi AB. Quare & GE ipſi CH erit æqualis: & vt GE ad GC, hoc eſt EL ad CF, ita erit CI ad EK. Eſt autem CI æqualis CF, quoniam & AB



eſt æqualis BF: rectangulum igitur LEK quadrato CF æquale erit. Sed rectangulo LEK vnà cum quadrato EM æquatur quadratum LM: plus poteſt igitur LM quàm CF quadrato EM. Eſtque EM parallela FC: igitur, per 44 huius, punctum E in eadem erit hyperbola, cuius erit C vertex, & dupla AC diameter tranſuerſa ſe ad contiguam in angulo ACF parametrum habens vt AC quadratum ad CF quadratum. Quare & in hyperbola erit ſpecie data. Quod erat demonſtrandum.

ALITER, ET BREVIVS.

Iungatur EC, & producatur occurrens AB productæ in G, & ductæ AH æquidiſtanti BC in H: ſeceturque EC bifariam in N. Igitur quoniam vt AB ad AD, ita eſt DE ad BC, hoc eſt GD ad GB: &, diuidendo, vt



AB ad BD, ita eſt GD ad DB: atque ideò GD æqualis eſt AB: erit & GE æqualis CH. Igitur, propter triangulum AGH, erunt, ex *63* huius, puncta E, C æqualiter à media ſectione N remota in eadem hyperbola ſpecie nota. Quod erat demonſtrandum.

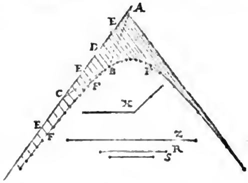
Probl. XL Prop. LXVI.

Datis hyperboles tranſuerſa diametro, & eiuſdem ad contiguam in dato angulo parametrum ratione; hyperbolem per puncta in plano deſcribere.

Sit data quæſitæ hyperboles diameter Z, & eius ad contiguam in dato X angulo parametrum ratio eadem quæ R ad S.

Sumpta AB æquali dimidio Z, vt R ad S, ita fiat AB quadratum ad BC quadratum: & ſit angulus ABC æqualis dato X angulo: iunctaque AC ſecetur bifariam in D: iungaturque BD: tum ſumptis in AC, etiam quantumlibet producta, quotlibet punctis, vt E, ducantur totidem ipſi BD parallelæ, vt EF, eiuſmodi vt rectangulo ADB

ſint æqualia ſingula omnia, vt AEF, rectangula: erunt, ex antecedente, inuenta puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola cuius dupla A B, hoc eſt Z, tranſuerſa erit diameter ſe ad contiguam in angulo ABC parametrum habens, vt A B quadratum ad B C quadratum, hoc eſt vt R ad S. Quare ſi æquabili manus ductu inuenta huiuſmodi puncta omnia curua iungantur linea; erit illa hyperbole quæſita in plano per puncta deſcripta. Quod facere oportebat.

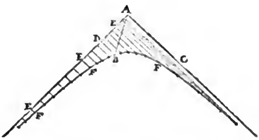


PROBL. XLI. PROP. LXVII.

Datis, poſitione, aſymptotis, & puncto in ſectione; hyperbolem per puncta in eodem plano deſcribere.

Sint datæ aſymptoti AE, AC, datumque in ſectione punctum B.

Ducatur ad vtramlibet AE, AC alteri æquidiſtans recta BD: & ſumptis in AD, vel in ipſa producta, quotlibet punctis, vt E, æquidiſtantes totidem ipſi DB ducantur vt EF, ita vt ſit ſemper AEF rectangulum rectangulo ADB æquale: erunt, vt in antecedente, acquiſita huiuſmodi puncta omnia, vt F, in eadem hyperbola quæ per punctum B tranſit, & cuius ſint aſymptoti AE, AC, iunctaque AB dimidia tranſuerſa diameter. Quare per eadem puncta quæſita ſectio facilè deſcribetur. Quod eſt propoſitum.



MONITVM.

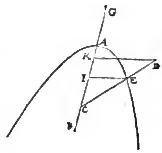
Quoniam autem nonnunquam accidit, vt expoſita aliqua coni ſectio qualibet iam deſcripta proponatur imitanda: ita & qua ratione ex eadem ipſa aliæ maiores minoreſue comparari & deſcribi poſſint, neque inutile, neque iniucundum fore duximus hic adnectere: & quemadmodum à ſumpto quolibet intra expoſitam ſectionem puncto eductis quotlibet lineis ſimiliter ſectis, proportionalium termini omnes ſint in optata ſectione.

Digitized by Google

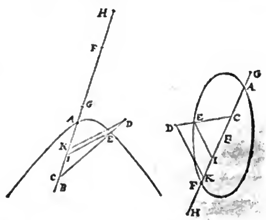
Ad generalem methodum vltimam.

Theor. XXVII. Prop. LXVIII.

Si ſit data quæcunque coni ſectio AE cuius diameter ſit AB, & vertex A : producta autem BA quantumlibet in G, & ſumpto in AB puncto quolibet C, educatur quomodocunque recta CD ſectioni occurrens in E, facienſque rationem CE ad CD eandem ei quæ eſt CA ad CG: Dico punctum D fore in eiuſdem nominis ſectione cuius ſit vertex G, & diameter GB.



Ordinatim enim ad AB diametrum applicetur EI: (niſi ipſa CD ad ipſam iam ſit ordinatim applicata, quo caſu ambo I, C puncta in vnum coibunt) eidemque æquidiſtans ducatur DK: ſitque AE ſectio primùm parabola. Quoniam igitur vt CA ad GC, ita eſt CE ad CD: & ita CI ad CK, hoc eſt EI ad DK: atque etiam ita reliqua IA ad reliquam KG: permutando, vt EI ad IA, ita erit DK ad KG. Eſtque EI à ſectione, ſiue parabola AE ad AI diametrum ordinatim applicata: quare & DK etiam dicetur ab eiuſdem nominis ſectione, ſiue parabola, cuius vertex ſit G, ad GK, vel GB, diametrum ordinatim applicata. Ideoque & punctum D in eadem erit parabola cuius ſit vertex G, & diameter GB.



Sit iam AE ſectio hyperbola, ſiue ellipſis, cuius tranſuerſa diameter ſit AF. Fiat vt CA ad CG, ita CF ad CH. Igitur quoniam vt CA ad CG, ita eſt CE ad CD: & ita EI ad DK, & CI ad CK: atque ideò & ita reliqua IA ad reliquam KG: & vt CF ad CH, hoc eſt CA ad CG: ita eſt CI ad CK: & ita reliqua FI ad reliquam HK: erit vt EI ad DK, ita IA ad KG: & ita FI ad HK. Quare, componendo, vt EI quadratum ad DK quadratum ita erit FIA rectangulum ad rectangulum HKG. Eſtque EI à ſectione cuius vertex ſit A, & tranſuerſa diameter AF, ad AI diametrum ordinatim applicata: quare & DK etiam dicetur ab eiuſdem nominis ſectione cuius vertex ſit G, & tranſuerſa

diameter

diameter GH, ad GK, vel GB, diametrum ordinatim applicata. Ideoque & punctum D in eadem erit ſectione, ſiue hyperbola, ſiue ellipſi, cuius vertex ſit G, & diameter GB. Quod erat demonſtrandum.

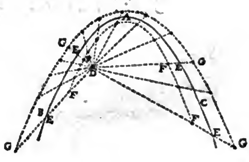
Sed & ſi vtrumque G & C punctum in recta AB, vel etiam in ipſa ad partem B producta, ſumptum fuerit; eadem prorſus ratione & punctum D demonſtrabitur fore in eiuſdem nominis ſectione cuius ſit GB diameter, & vertex G. Nihil enim diuerſi inde accidet, niſi quod ſectio quæ per puncta G, D incedet, priori caſu ipſam AE ſectionem continebit, & includet, at poſteriori hoc caſu ab ipſa includetur, & circumſcribetur.

MONITVM.

Non te moueat, Lector, quòd hoc theorema ieiunè nimis à nobis ſit propoſitum, eiuſque concluſio non ſatis rei naturam aſſequatur, & exprimat. Hoc enim conſultò à nobis eſt factum, ne nondum demonſtrata locum hîc non proprium præoccuparent. Poterat certè è poſitis & demonſtratis concludi punctum D eſſe in ſimili ſectione ei quæ per puncta A & E tranſit: ſed nondum ſimilium coni ſectionum communis natura innotuit, quæ totius huiuſce ſpeculationis & ſuſcepti operis quartum ſibi ſelegit librum. Ideoq; & nonnihil hîc diſſimulauimus: ſemotiſq; ijs quæ illius loci viſa ſunt propria, ea tantùm appoſuimus quæ ad præſentem rem facerent. Quanquam & cuique liberum erit, ſi videbitur, ſiue hoc theorema, ſiue problema ſequens, de ſimilibus ſectionibus enunciare: atque ita emenſa deſcribendarum per puncta coni ſectionum ſyluæ metam, & hoc ſecundo libro generalem hanc coronidem imponere.

PROBL. XLII. PROP. LXIX.

Data quacunque in plano coni ſectione; Quotlibet alias eiuſdem nominis ſectiones in eodem plano per puncta exhibere.

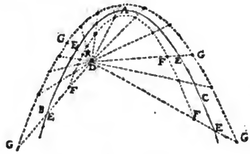


Sit data coni ſectio quæcunque BAC, ſiue parabola, ſiue hyperbola, ſiue etiam ellipſis.

Sumatur intra ſectionem, vel etiam in ipſa ſectione, quodlibet punctum D à quo ad ipſam ſectionem ducatur quælibet recta DE, quæ producatur aut ſecetur in F & G vt videbitur: tum ab eodem D puncto ad eandem

Digitized by Google

ſectionem ducantur quotlibet rectæ quæ ſemper in eandem DE ad DF, aut DG, rationem ſecentur aut producantur. Palam eſt, ex antecedente, puncta ſic acquiſita omnia, vt F, G, fore in coni ſectionibus eiuſdem nominis cuius ſit & ipſa BAC ſectio, quarum communis erit



eadem quæ ipſius BAC ſectionis diameter quæ per aſſumptum D punctum ducetur. Quare ſi aſſignata huiuſmodi puncta omnia æquabili manus ductu curuis iungantur lineis; erunt illæ eiuſdem nominis ſectiones cum data BAC ſectione in eodem plano per puncta exhibitæ: Quod facere oportebat.

MONITVM.

Hîc monuiſſe operæpretium duximus, quoniam ea tantùm nobis in emenſo hoc ſecundo libro proſequi viſum eſt quæ ad geometricam in plano coni ſectionum per puncta deſcribendarum rationem pertinerent, reliquas omnes earumdem ſectionum deſcribendarum methodos mechanicas, ſiue organicas, conſultò hinc ſemouiſſe, & in proprium locum aſſeruaſſe ſub appendicis mechanicæ ad hunc ſecundum librum titulo ad calcem operis amandato: vbi vnaquæque coni ſectionum deſcriptio mechanica ſuam tunc aliquam huius libri geometricam per puncta deſcribendi methodum originariam & πρωτότυπον aſſumet à qua pendeat, & fidem accipiat. Hinc appoſita à nobis in eodem hoc ſecundo libro pleræque methodi minus compendioſæ, & quæ negligi facilè poterant, aut præteriri, niſi quod ad mechanicam vtiles, & organicæ alicui deſcriptioni viam ſtructuræ ſuum etiam inibi locum obtinere meruerunt.

SECVNDI LIBRI FINIS.

Digitized by Google

Hactenus commiſſa vel omiſſa, ſi placet, emendabit aut reſtituet Lector beneuolus in hunc qui ſequitur modum.

Pagina 33 *linea* 15 *à fine* vt in antecedente, *Repone* vt in 20 huius,
Pag. 34 *lin. penult.* vtrinque *Rep.* vtrobiquè
Pag. 46 *lin.* 20 vt ſit Z E *Rep.* vt ſit Z X
Pag. 47 *lin.* 15 *à f.* Z G in N: *Rep.* Z G in V:
Pag. 49 *lin.* 1 ex 12 huius, *Rep.* ex coroll. ad 13 huius,
Pag. 50 *lin.* 5 *à f.* per 14 huius, *Rep.* per 15 huius,
Pag. 60 *lin.* 16 *à f.* faciat B E, D E *Rep.* faciat B C, D E
Pag. 62 *lin. penult.* recta E O *Rep.* recta O A
Pag. 66 *lin.* 12 ipſius A B *Rep.* ipſius A C
Pag. 69 *lin.* 10 *à f.* binæ rectæ B C, *Rep.* binæ rectæ æquidiſtantes BC,
Pag. 72 *lin.* 20 intra centrum *Rep.* inter centrum
Pag. 74 *lin.* 16 & angulum *Rep.* aut angulum
Pag. 88 *lin.* 10 *à f.* per eadem parallelæ *Rep.* per eadem baſi BC parallelæ
Pag. 91 *lin.* 4 *à f. dele* & permutatim
Pag. 92 *lin.* 19 reſpondentia F I, *Repone* reſpondentia æqualia F I,
Pag. 95 *lin.* 9 differentiæ, hoc eſt *Rep.* differentiæ, vel copulæ, hoc eſt
Pag. 101 *lin.* 8 *à f.* arcus deſcripti *Rep.* arcus centro A deſcripti
Pag. 104 *lin.* 12 *à f.* in A, D puncta *Rep.* in AD puncta.
Pag. 107 *lin.* 16 *à f.* C E in K: *Rep.* D H in K:.
Pag 116 *lin.* 14 occurrens in I, *Rep.* occurrente in I,
Pag. 119 *lin.* 9 *à f.* per F, ſi opus *Rep.* per F ad H D, ſi opus
Pag. 120 *lin.* 9 parametum *Rep.* parametrum
Ibid. lin. 20 *à f.* A E producatur *Rep.* C E producatur
Pag. 122 *lin.* 6 in D ſectione *Rep.* D in ſectione
Si quæ alia nondum animaduerſa occurrant tuæ, Lector, humanitati commendantur.

Ad Tertium Conicorum Librum.

M O N I T V M.

Expoſitis hactenus Elementis Conicis, varijſque deſcribendarum Conicarum linearum compendiis, expedit iam tibi, Amice Lector, vt de eiuſdem nominis coni ſectionum comparatione ad inuicem dicere aggrediamur: quò in ijſdem cautior euadas: ne cum opus fuerit, aut aliter occurrerit, ipſarum aliqua vti, incipias abuti. En igitur hoc tertio libro varias methodos ſumus tradituri, quibus tu de illis examen inſtituere poſſis: & an propoſitæ, ſiue in plano ſiue in coni ſuperficie, eiuſdem nominis coni ſectiones inuicem conueniant nec ne, & in quo differant ab inuicem, facilè tandem dignoſcas.

Illud idem olim præſtitiſſe debuit Apollonius ille magnus geometra qui ſexti ſui Conicorum libri argumentum περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν *eſſe voluit, & à limine primi indicauit. Quare hac in parte proximis duobus libris noſtris ipſum ſiue ſepultum ſuſcitabimus, ſiue latitantem euocabimus aut excitabimus. Quanquam fortè pleraque noua etiam & Apollonio intacta ad inſtitutum noſtrum profutura proponentur à nobis: prout magni tibi momenti duximus ſpecialem hanc coni ſectionum culturam, quæ ideo pleniùs aliquantò inculcanda nobis viſa eſt, & nouis propoſitis illuſtranda.*

Nouiſti, ſi non fallimur, ex præmiſſis ipſas coni ſectiones quoquo modo exprimere & imitari: ſed an propoſitis aut quæſitis eædem ſint, aut ſimiles, nondum euincere didiciſti. Horum igitur alterum tertio hoc libro tibi proponere decretum nobis eſt, alterum ſequenti. Nec inconſultò: ſiquidem dum in ipſis propoſitæ cuicunque coni ſectioni eandem aut ſimilem in alicujus coni ſuperficie exhibere iubemus: vel quum conum quærimus cuius illa ſit ſectio: aut etiam in exhibito quolibet cono eandem vel ſimilem propoſitæ cuicunque inuenire proponimus: rationemque & methodum ſubinde tibi tradimus qua illud expedire valeas; etiam illud agimus, vt inde noua μηχανὴ *tibi innoteſcat, qua ex cuiuſlibet ſecti coni vtroque fragmento quæſitam quam-*

cunque coni ſectionem exprimere & delineare poſſis, non ſecus ac ſi circa coni ipſius aut cuiuſuis cylindri baſem ſtylo circumducto quæſitam intercepti circuli circumferentiam ſis deſcripturus. Quare & proximè præmiſſis ſatis cohærens nobis viſa eſt ſuſcepta huiuſmodi earumdem inuicem coni ſectionum diſcuſſio: ideoque & huius tertij libri propria, in quo multimodam etiam cuiuſcunque propoſiti coni ſectionem expendimus, & in propoſitæ cuiuſcunque ſectionis propriam coni ſuperficiem penè omnimodam inquiſiuimus, ſaltem quatenus propoſito conueniens nobis occurrit. Inſuper pleraque inibi ad phyſica experimenta, & ad ſolidorum locorum ſiue problematum compoſitiones tibi appoſuimus, non parum profutura. Sed iam Prodromus noſter profectionem alteram vrget: tu, ſi lubet, iterum accingere, & comitem te itineris illi adiunge.

Digitized by Google

CLAVDII MYDORGII

PATRICII PARISINI

CONICORVM

LIBER TERTIVS.

De eiuſdem nominis Coni-ſectionum inuicem comparatione prior.

SIVE

De Jiſdem Coni-ſectionibus

DEFINITIONES.

I.

SIMILES Coni-ſectionum diametros dicimus, cum vnius anguli ab ordinatim ad ipſam ductis facti, æquales ſunt alterius angulis qui ab ordinatim ad ipſam ductis fiunt.

II.

Coni-ſectionem Coni-ſectioni aptè ſuperponi dicimus, cum binæ quælibet ipſarum ſimiles diametri ita ſuperponuntur & conueniunt, vt vertices congruant inuicem.

III.

Eaſdem Coni-ſectiones dicimus, quæ congruunt omnino & conueniunt altera alteri aptè ſuperpoſita.

IIII.

Similes conos dicimus, quorum per axem ſectorum ad rectos baſi angulos triangula ſunt ſimilia.

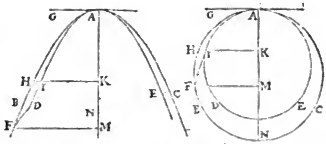
V.

Diſſimiles dicimus, aut ſpecie differentes, conos, quorum triangula per axem ad baſim recta non ſunt ſimilia.

Digitized by Google

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI ſint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum poſitæ, quas in communi vertice eadem recta contingat linea: & non ſit altera alteri eadem; non erit illarum aliud inſuper commune punctum.



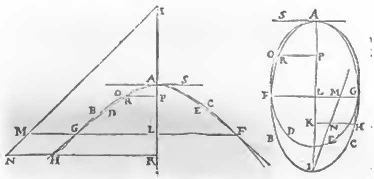
Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, B A C, D A E, quarum communis ſit diameter A N, communiſque vertex A: ipſaſque contingat in A recta A G: non ſit autem altera alteri parabola, vel circuli circumferentia, eadem. Dico non eſſe illarum aliud inſuper commune punctum.

Si enim fieri poteſt, ſit illarum aliud etiam commune punctum F. Ducaturq; rectæ AG æquidiſtans FM. Ordinatim igitur ad AN diametrum applicata erit FM. Quare & in vtraque parabola quadrato, vel rhombo, ex FM æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, ſub intercepta diametro AM & contigua parametro. Et in vtraque circuli circumferentia quadrato FM erit æquale rectangulum ſub eadem AM & reſidua diametro. Igitur tam vtriuſque parabolæ parametri, quam vtriuſque circuli circumferentiæ diametri erunt inuicem æquales. Quoniam autem non ſunt eædem inuicem binæ BAC, DAE parabolæ, vel circulorum circumferentiæ; altera alteri non omnino congruit. Sit igitur in parabola, vel circuli circumferentia, BAC punctum quodcunque H in quo parabola, vel circumferentia, DAE ipſi non congruit: & ab ipſo ad AN diametrum contingenti AG æquidiſtans ducatur HK, parabolam, vel circuli circumferentiam, DAE ſecans in I. Ordinatim igitur etiam applicata erit HIK: & erit major HK quàm IK: ideoque & quadratum HK majus quadrato IK. Sed in parabola BAC, quadrato, vel rhombo, HK æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, ſub AK diametro & contigua parametro: & in parabola DAE, quadrato, vel rhombo, IK æquale erit rectangulum, vel parallelogrammum, ſub eadem AK diametro & contigua parametro: parabolæ igitur DAE parameter communi AN diametro contigua minor erit parametro parabolæ BAC. Sed & jam æqualis oſtenſa eſt:

igitur & æqualis erit & minor, quod eſt abſurdum. Atque etiam cum in circuli circumferentia BAC, quadrato HK æquale ſit rectangulum ſub AK & reſidua diametro: & in circumferentia DAE, quadrato IK æquale rectangulum ſub eadem AK & reſidua item diametro: ideoque & huius diameter illius diametro ſit minor: idem quoque abſurdum ſequetur. Non igitur parabola, aut circuli circumferentia, DAE parabolæ, vel circuli circumferentiæ, BAC in alio, præter communem A verticem, rurſus communi puncto conuenit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. II. PROP. II.

Si ſint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, non eędem inuicem, quas circa communem diametrum poſitas in communi vertice eadem recta contingat linea: & altera alteri occurrat; erunt illarum bina occurſus puncta: ſed in nullo alio communi puncto rurſus conuenient.

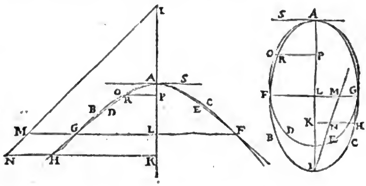


Sint binæ hyperbolæ, aut binę ellipſes, BAC, DAE, quarum cōmunis vertex ſit A, communiſque diameter AK: ipſaſque contingat in A recta AS: & altera alteri hyperbola, vel ellipſis, occurrat. Dico 1. hyperbolam, vel ellipſim, DAE hyperbolæ, vel ellipſi, BAC in duobus punctis occurrere.

Sit enim occurſus punctum G. Et ducta rectæ AS æquidiſtans GL producatur ad vtramuis ſectionem in F. Ordinatim igitur ad communem AK diametrum applicata erit vtraque GL, FL: ideoque & FL erit æqualis GL. Sunt autem puncta A,G,L in eodem plano: vtraque igitur ſectio in eodem per AGL plano exiſtit. Quare producta GL vtrique ſectioni occurret in F. Occurret igitur rurſus DAE ſectio ſectioni BAC in eodem F puncto. Quare erunt illarum bina G & F occurſus puncta. Dico 2. in nullo alio communi puncto rurſus conuenire.

Si enim fieri poteſt, conueniant rurſus in puncto H. Ductaque HK æquidiſtans ſit AS, ideoque & ad AK diametrum ordinatim applicata. Singulis autem KH, LG quadratis ſingula ponantur æqualia AKN, ALM rectangula: iunctaque & producta NM productæ AK diametro occurrat in I. Vt igitur NK ad KI, hoc eſt vt NKA rectangulum, ſiue HK quadratum, ad rectangulum IKA, ita erit

ML ad LI, hoc eſt ita MLA rectangulum, ſiue GL quadratum, ad rectangulum ILA: & permutatim. Quare, ex 8. primi huius, vtriuſq; ſectionis quæ per A,G,H puncta tranſit tranſuerſa diameter erit AI. Quoniam autem altera alteri ſectio non eſt eadem: ſumatur in cõmuni AK diametro, præter K & L, quodlibet aliud punctum P huiuſmodi, vt ducta rectæ AS æquidiſtans, ideoque & ad AK diametrum ordinatim

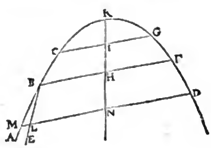


applicata, recta PRO interiorem ſectionem diuidat in R, & exteriori occurrat in O. Erit igitur OP major quàm RP: atque ideo & OP quadratum quadrato RP maius. Sed, propter AOGH ſectionem, vt IKA rectangulum ad HK quadratum, ita erit IPA rectangulum ad OP quadratum: ſimiliter &, propter ARGH ſectionem, vt IKA rectangulum ad HK quadratum, ita erit IPA rectangulum ad RP quadratum: quare vt IPA rectangulum ad OP quadratum, ita erit IPA rectangulum ad RP quadratum. Quadrato igitur RP æquale erit quadratum OP. Sed iam oſtenſum eſt maius: igitur & majus erit & æquale, quod eſt abſurdum. Non conuenit igitur DAE ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, ſectioni BAC, præter verticem & bina occurſus puncta, in alio rurſus communi puncto. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. III. PROP. III.

Coni ſectio coni ſectioni vel circuli circumferentiæ non conueniet ita, vt pars tantùm altera eadem ſit.

Si enim fieri poteſt, coni ſectio ABCD coni ſectioni, vel circuli circumferentiæ, EBCD in communi tantùm BCD portione conueniat. Sumpto autem communi quocunque puncto B, ducatur in portione BCD recta quæcunq; BF, cui



à puncto C, aut alio quolibet in eadem portione, ducatur æquidiſtans CG: ſectiſque bifariam BF, CG in H & I, iungatur HI & producatur ad ſectionem in K. Vtriuſque igitur ABCD, EBCD ſectionis diameter erit KH: & ad ipſam vtraq; BF, CG ordinatim

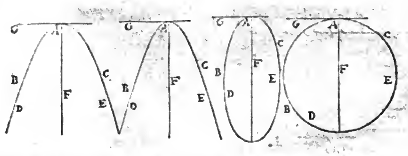
ordinatim erit applicata. A puncto autem D vtrique etiam ſectioni communi, ipſis BF, CG æquidiſtans ducatur DM ſectioni ABCD occurrens in M, & ſectioni EBCD in L, ipſique KH diametro productæ in N. Igitur, propter communem KN diametrum, vtraque DM, DL biſariam erit ſecta in N: eritque LN æqualis MN, quod eſt abſurdum. Siquidem autem punctum B terminus non ſit communis BCD portionis, & ducta per D ipſi BF æquidiſtans eidem etiam portioni occurrat; ducetur recta quæcunque DM, eiuſmodi vt alteri ſectioni occurrat in M, & alteri in L, eidemque binæ æquidiſtantes in communi BCD portione ducentur, vt BF, CG, quibus biſariam in H & I diuiſis, iuncta HI & producta in K vtriuſque ſectionis erit diameter, vnde idem abſurdum ſequetur neceſſariò. Quare vtriuſque ABCD, EBCD ſectionis exiſtente parte aliqua BCD eadem; erit & reliqua vtrique communis. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Igitur, Si coni ſectio coni ſectioni aliqua ex parte congruit; & tota toti congruet.

THEOR. IV. PROP. IV.

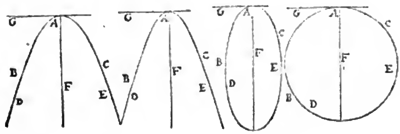
Si binæ parabolæ, vel binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, circa communem diametrum poſitæ, & eandem rectam lineam communi vertice contingentes, inuicem rurſus conueniant: parabolæ quidem, veluti & circulorum circumferentiæ, in vno præter verticem communi puncto: at hyperbolæ, vel ellipſes, etiam in tribus; erit altera alteri parabola, vel hyperbola, aut ellipſis, veluti & circuli circumferentia, eadem.



Sint binæ ſectiones, vt proponuntur, BAC, DAE, quarum communis ſit vertex A, communiſque diameter AF: ipſaſque in A recta contingat linea AG: ſectio autem DAE ſectioni BAC in aliquo inſuper communi B puncto conueniat, ſi ſint parabolæ, aut

Digitized by Google

circulorũm circumferentiæ: vel etiam in tribus B,C,E punctis, ſi ſint hyperbolæ, aut ellipſes. Dico ſectionem D A E ſectioni B A C eſſe eandem.

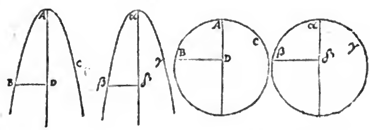


Si enim fieri poteſt, non ſit altera alteri eadem. Siquidem igitur ſectiones B A C, D A E parabolæ ſunt, aut circulorum circumferentiæ, quoniam circa communem diametrum ſunt poſitæ, & ipſas in communi A vertice eadem recta contingit linea; non erit illarum aliud inſuper commune punctum in quo conueniant, ex 1. huius. Hoc autem eſt contra hypotheſim. Sed ſint hyperbolæ, vel ellipſes, quæ ſibi inuicem in duobus, præter communem A verticem, punctis conueniant; non erit igitur vllum aliud inſuper ipſarum commune punctum, ex 2. huius. Quod etiam eſt contra hypotheſim. Quare congruat & conueniat altera alteri ſectio neceſſe eſt. Atqui, ex anteced. non poteſt pro parte tantùm altera alteri congruere & conuenire: quare altera alteri applicata & ſuperpoſita omnino congruet & conueniet. Igitur &, ex def. altera alteri eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

Theor. V. Prop. V.

Si ſint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ: & vtrobique à ſectione ad diametrum rectâ ordinatim ductâ, fuerint tam ductæ vtriuſque quam interceptæ ab ipſis diametrorum portiones ad verticem æquales: atque in binis parabolis ęqualis etiam vtrobique angulus applicata & diametro contentus; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem.

Sint binæ parabolæ, veluti & binæ circulorum circumferentiæ, B A C, $\beta \alpha \gamma$, quarum diametri A D, $\alpha \delta$. Ordinatimque ſint ductæ rectæ B D, $\beta \delta$, quæ inuicem ſint æquales. Sint autem & inſuper æquales rectæ A D, $\alpha \delta$: atque etiam, in bi-



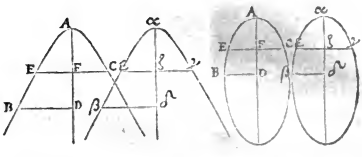
Digitized by Google

nis parabolis, angulus $\alpha\delta\beta$ angulo ADB æqualis. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eſſe eandem: & circuli circumferentiam circuli circumferentiæ.

Altera enim alteri parabola, aut circuli circumferentia, ſuperponatur, ita vt diametri inter ſe congruant, & in vnam communem diametrum coeant. Igitur congruente verticis puncto α ipſi A, etiam & punctum δ puncto D congruet: &, propter æquales $\alpha\delta\beta$, ADB angulos, etiam & recta $\delta\beta$ rectæ DB congruet, & punctum β puncto B. Quæ igitur à communi α, vel A vertice ipſis $\beta\delta$, BD ducetur æquidiſtans, vtramque $\beta\alpha\gamma$, BAC ſectionem in eodem communi vertice continget. Et altera alteri ſectio inſuper in vno communi β, vel B puncto conuenit: igitur, ex anteced. altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes: & binis vtrobique rectis à ſectione ad diametrum ordinatim applicatis, fuerint vnius applicatæ, & interceptę ab ipſis diametri portiones ad verticem, alterius applicatis & interceptis, ſingulæ ſingulis, ęquales, & ſub ęqualibus etiam vtrobique angulis coniunctæ; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, eadem.

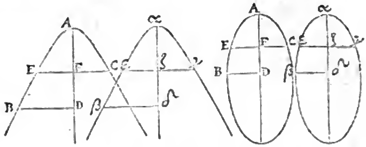


Sint binæ hyperbolæ, vel binę ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum diametri AD, $\alpha\delta$: ordinatimq; à ſectione BAC ductæ ſint binæ BD, EF, rectæ: totidemque à ſectione $\beta\alpha\gamma$ rectæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$. Sint autem tam ductæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$ ductis BD, EF, quam interceptæ diametri portiones $\alpha\delta$, $\alpha\zeta$ interceptis AD, AF ſingulæ ſingulis æquales: atque etiam angulus $\alpha\delta\beta$, angulo ADB æqualis. Dico hyperbolam aut ellipſim $\beta\alpha\gamma$, hyperbolæ aut ellipſi BAC eſſe eandem.

Producantur vtrobique EF, $\epsilon\zeta$ donec ſectioni occurrant: ſitque occurſus in C & γ. Quoniam igitur vtraque $\alpha\zeta$ AF diameter eſt, & vtraque $\epsilon\zeta$, EF ordinatim applicata; erit & CF æqualis EF, & $\gamma\zeta$ æqualis $\epsilon\zeta$. Itaque ſuperponatur altera alteri hyperbola, aut ellipſis, ita vt diametri $\alpha\delta$, AD inter ſe congruant, & in vnam communem dia-

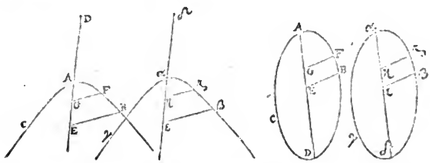
Digitized by Google

metrum coeant: contingente igitur vertice α ipſum A, etiam & puncta ζ, δ punctis F, D coincident: & propter æquales $\alpha\zeta\epsilon$, AFE, itemque $\alpha\zeta\gamma$, AFC angulos, recta $\epsilon\gamma$ rectæ EC, itemque recta $\delta\beta$ rectę DB congruet, & puncta γ, ϵ, β punctis C, E, B conuenient. Quæ igitur à communi vertice α, vel A ipſis $\epsilon\zeta$, EF ducetur æquidiſtans vtramque $\beta\alpha\gamma$, BAC ſectionem continget. Sed & altera alteri præter communem A verticem etiam in tribus B, E, C punctis conuenit: igitur, ex 4 huius, erit altera alteri ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, eadem. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. VII. PROP. VII.

Si binæ hyperbolæ, vel binę ellipſes, ęquales habeant diametros tranſuerſas, & vtrobique à ſectione ad eaſdem rectâ ordinatim applicatâ, fuerint tam applicatę inuicem, quam interceptæ ab ipſis diametrorum portiones ad verticem etiam inuicem ęquales: atque ęqualis angulus vtrobique applicata & diametro contentus; erit altera alteri hyperbola, aut ellipſis, eadem.



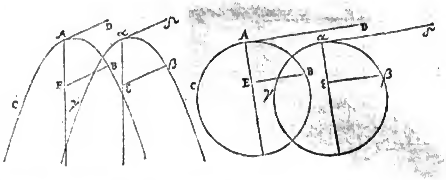
Sint binæ hyperbolæ, aut ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum tranſuerſæ ſint diametri AD, $\alpha\delta$ inuicem æquales, & ad ipſas ordinatim ductæ rectæ BE, $\beta\epsilon$ etiam æquales. Sint autem & interceptæ ab ipſis diametrorum portiones AE, $\alpha\epsilon$ inuicem æquales: atque inſuper angulus $\alpha\epsilon\beta$ angulo AEB æqualis. Dico hyperbolam aut ellipſim $\beta\alpha\gamma$, hyperbolę aut ellipſi BAC eſſe eandem.

Sumptis enim æqualibus vtrobique diametrorum portionibus AG, $\alpha\eta$, ipſis EB, $\epsilon\beta$ æquidiſtantes vtrobique agantur ad ſectionem rectæ GF, $\eta\zeta$. Igitur, propter vtramque ſectionem, vt DEA rectangulum ad EB

ad EB quadratum, ita erit DGA rectangulum ad GF quadratum, & vt $\delta\varepsilon\alpha$ rectangulum ad $\varepsilon\beta$ quadratum, ita etiam erit $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\eta\zeta$ quadratum. Vt autem DEA rectangulum ad EB quadratum, ita, propter æquales $\delta\varepsilon$, DE, itemque $\alpha\varepsilon$, AE, atque etiam $\varepsilon\beta$, EB, erit $\delta\varepsilon\alpha$ rectangulum ad $\varepsilon\beta$ quadratum: igitur vt DGA rectangulum ad GF quadratum, ita erit $\delta\eta\alpha$ rectangulum ad $\eta\zeta$ quadratum. Sed, propter æquales DG, $\delta\eta$, itemque AG, $\alpha\eta$, rectangulo DGA æquale eſt rectangulum $\delta\eta\alpha$: igitur & quadrato GF etiam æquale erit quadratum $\eta\zeta$, ideoque & recta $\eta\zeta$ rectæ GF æqualis. Quare, ex antecedente, hyperbola vel ellipſis $\beta\alpha\gamma$, hyperbolæ vel ellipſi BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Si binæ parabolæ, vt & binæ circulorum circumferentiæ, parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad contiguas diametros applicatas; erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem.

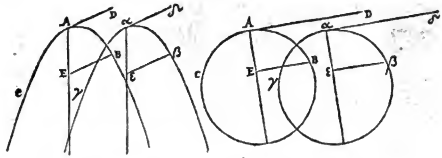


Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum ſint diametri AE, $\alpha\varepsilon$, & contiguæ parametri AD, $\alpha\delta$. Sint autem $\alpha\delta$, AD inuicem æquales, atque etiam angulus $\delta\alpha\varepsilon$ angulo DAE ęqualis. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC eſſe eandem: vt & circuli circumferentiam circuli circumferentiæ.

Sumptis enim æqualibus $\alpha\varepsilon$, AE diametrorum portionibus, ipſis $\alpha\delta$, AD parametris parallelæ vtrobique ad ſectionem agantur $\varepsilon\beta$, EB. Vtraque igitur $\varepsilon\beta$, EB ad diametrum ordinatim erit applicata: quare in parabolis quidem rectangulo DAE æquale erit EB quadratum, rectanguloque $\delta\alpha\varepsilon$ quadratum $\varepsilon\beta$ æquale. Et in circulorum circumferentiis, rectangulo DAE æqualia ſunt bina EB, AE quadrata, rectanguloque $\delta\alpha\varepsilon$ bina æqualia $\varepsilon\beta$, $\alpha\varepsilon$ quadrata. Sunt

Digitized by Google

autem & rectangula $\delta\alpha\epsilon$, D A E inuicem æqualia: atque etiam am-



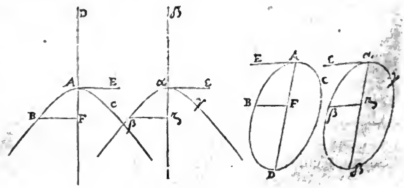
bo $\alpha\epsilon$, A E quadrata æqualia inuicem: igitur & æqualia inuicem erunt ambo $\epsilon\beta$, E B quadrata, ideoque & rectæ $\epsilon\beta$, E B inuicem æquales. Atque eſt etiam angulus $\alpha\epsilon\beta$ angulo A E B æqualis: igitur, ex 5 huius, erit altera alteri parabola, vt & circuli circumferentia, eadem. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Itaque, Si binæ parabolæ æquales habeant rectas parametros; erit altera alteri parabola eadem.

Theor. IX. Prop. IX.

Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, æquales habeant diametros tranſuerſas, & ad ipſas in æqualibus vtrobique angulis applicatas parametros etiam æquales; erit altera alteri hyperbola, ſiue ellipſis, eadem.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum ſint diametri trāſuerſę AD, $\alpha\delta$, & contiguæ parametri A E, $\alpha\epsilon$. Sint autem $\alpha\delta$, A D inuicem æquales, atque etiam $\alpha\epsilon$, A E inuicem: itemque angulus $\delta\alpha\epsilon$ angulo D A E æqualis. Dico hyperbolam vel ellipſim $\beta\alpha\gamma$, hyperbolæ aut ellipſi B A C eſſe eandem.

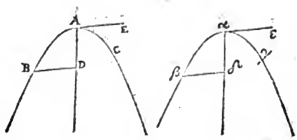
Sint enim ſumptę æquales diametrorum portiones A F, αζ: & ipſis A E, αε parametris æquidiſtantes ad ſectionem ducantur F B, ζβ. Vtraque igitur B F, βζ ad diametrum ordinatim erit applicata: quare, propter vtramque ſectionem, vt D A ad A E, ita erit rectangulum D F A ad quadratum F B: & vt δα ad αε, ita erit rectangulum δζα ad quadratum ζβ. Vt autem D A ad A E, ita eſt δα ad αε: igitur vt D F A rectangulum ad F B quadratum, ita erit δζα rectangulum ad ζβ quadratum. Eſtque δζα rectangulum rectangulo D F A æquale, quoniam & rectæ δζ, D F, itemque αζ, A F ſunt inuicem æquales: igitur & quadratum ζβ quadrato F B erit æquale, & recta ζβ rectæ F B æqualis. Suntque etiam anguli δζβ, D F B inuicem æquales: igitur, ex 7 huius, erit altera alteri hyperbola, ſiue ellipſis, eadem. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Itaque, Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, æquales habeant tranſuerſos axes, atque etiam rectas parametros inuicem æquales; erit altera alteri hyperbola, aut ellipſis, eadem.

THEOR. X. PROP. X.

Si binæ coni ſectiones eædem ſint inuicem; quæ ſub æqualibus vtrobique angulis applicabuntur parametri, æquales erunt inuicem, & tranſuerſę item diametri inuicem.



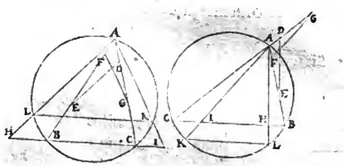
Sint binæ coni ſectiones eędem inuicem B A C, βαγ, primùm parabolę, quarum diametri AD, αδ, & contiguæ parametri A E, αε. Sit autem angulus εαδ angulo E A D ęqualis. Dico αε parametrum parametro A E eſſe ęqualem.

Sumptis enim ęqualibus AD, αδ, ipſis AE, αε rectis parallelę agantur D B, δβ, & parabola βαγ parabolę B A C ſuperponatur, ita vt diametri αδ, A D in vnam coeant, punctumque verticis α ipſi A vertici congruat. Congruet igitur altera alteri parabola, ex definit. vt & recta δβ rectę D B: quare & punctum β puncto B. Æqualis igitur erit δβ, ipſi D B, ideoque & quadratum δβ quadrato D B ęquale. Quoniam autem vtraque D B, δβ pa-

Et ſunt ſingulæ αδ, αθ ſingulis AD, AH æquales: igitur & reliqua δθ reliquæ DH æqualis erit: & vt rectarum GD, KH differentia ad rectam DH, ita erit rectarum ηδ, κθ differentia ad δθ. Sed vt GD, KH differentia ad DH, ita eſt GD ad DF: & vt ηδ, κθ differentia ad δθ, ita eſt ηδ ad δζ: igitur vt GD ad DF, ita erit ηδ ad δζ: &, permutando, vt GD ad ηδ, ita erit DF ad δζ. Suntque GD, ηδ æquales: igitur æquales erunt DF, δζ: ablatiſque, vel additis, æqualibus AD, αδ, erunt reliquæ, vel compoſitæ, AF, αζ, tranſuerſæ ſcilicet ſectionum diametri, inuicem æquales. Vt autem FD ad DG, ita eſt FA ad AE: & vt ζδ ad δη, ita eſt ζα ad αε: igitur vt FA ad AE, ita erit ζα ad αε: &, permutando, vt FA ad ζα, ita erit AE ad αε. Suntq; FA, ζα oſtenſæ inuicem æquales: igitur & αε parameter parametro AE æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA I. PROP. XI.

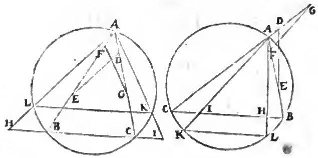
Si propoſiti cujuſlibet trianguli internum verticis angulum, aut, producto alterutro vltra verticem crure, externum binæ rectæ ſubtendant, ita vt ad communem verticalem angulum bina conſtituant ſimilia triangula: & rectis eiuſmodi communi angulo ſubtenſis parallelæ à trianguli vertice ad baſim cadant; erunt ſub interceptis ſectæ, aut productæ baſis partibus à dictis parallelis facta rectangula inuicem, vt parallelarum quadrata inuicem.



Sit triangulum quodcunq; BAC, cuius vertex A, baſis BC: angulumque internum A, aut, producto alterutro, vt CA, crure, externum ſubtendant binæ DE, FG rectæ, ita vt ſit triangulum ADE ſimile triangulo AFG: & binis DE, FG rectis communi angulo ſubtenſis à vertice A ad baſim BC binæ cadant parallelæ AH, AI. Dico vt quadratum AH ad quadratum AI, ita eſſe rectangulum BHC ad rectangulum BIC.

Circumſcribatur enim triangulo BAC circulus cuius circumferentia ipſas AH, AI, vbi opus productas, ſecet in K & L: iungaturque KL. Quoniam igitur, propter parallelas FG, AI, itemque DE, AH, angulus CAK angulo AGF eſt æqualis, anguluſque BAH æqualis angulo

AED: &, propter ſimilitudinem triangulorum ADE, AFG, angulus FGA æqualis eſt angulo AED; erit & angulus CAK angulo BAH æqualis, ideoque & circumferentia LB æqualis circumferentiæ KC. Æquidiſtabit igitur LK ipſi BC, & vt AH ad HL, ita erit AI ad IK. Sed vt AH ad HL,

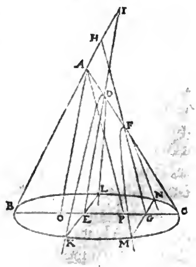


ita eſt AH quadratum ad AHL, hoc eſt BHC, rectangulum: & vt AI ad IK, ita eſt AI quadratum ad AIK, hoc eſt BIC, rectangulum: igitur vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita erit AI quadratum ad BIC rectangulum: &, permutando, vt AH quadratum ad AI quadratum, ita erit BHC rectangulum ad BIC rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROP. XII.

Si conus iam plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibuſque in ſuperficie binas hyperbolas, quarum productæ diametri conſtituant ad externum eiuſdem per axem trianguli verticalem angulum bina triangula ſimilia & æqualia; erit factarum huiuſmodi binarum hyperbolarum altera alteri eadem.

Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui per axem ad rectos baſi BC angulos ſectus plano faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibuſque in ſuperficie binas KDL, MFN hyperbolas, quarum ſint diametri DE, FG, quæ productæ occurrant cruri BA producto in I & H, & faciant bina ADI, AHF triangula ſimilia & æqualia. Dico hyperbolam MFN hyperbolæ KDL eſſe eandem.



Quoniam enim rectæ DI, FH tranſuerſæ ſunt ſectionum diametri; ipſis æquidiſtantes à vertice trianguli BAC ad baſim BC ducan-

tur rectæ, AO quidem ipſi DI, & AP ipſi FH. Igitur, ex antecedente, vt A O quadratum ad B O C rectangulum, ita erit A P quadratum ad B P C rectangulum. Sed vt A O quadratum ad B O C rectangulum, ita eſt, ex 14 primi huius, D I tranſuerſa hyperbolę K D L diameter ad contiguam parametrum: & vt A P quadratum ad B P C rectangulum, ita eſt F H tranſuerſa hyperbolæ M F N diameter ad parametrum contiguam: igitur vt D I tranſuerſa hyperbolæ K D L diameter ad contiguam parametrum, ita erit F H tranſuerſa hyperbolæ M F N diameter ad parametrum contiguam. Sed, propter triangula A D I, A H F ſimilia & æqualia, æqualis eſt F H tranſuerſa diameter tranſuerſæ diametro D I: igitur & ipſis contiguæ parametri inuicem æquales erunt. Quoniam autem vtrumque per K D L & M F N, atque etiam baſis coni planum, ad triangulum BAC rectum eſt; erunt communes eorumdem per K D L, M F N planorum cum baſe coni ſectiones, ſcilicet rectæ KL, MN, ad idem B A C triangulum, ideoque & ad rectas omnes in eodem triangulo ipſas contingentes, perpendiculares: quare & vterq; DEK, FGM angulus erit rectus: & vtraq; KL, MN bifariam erit ſecta, hæc in G, illa in E. Vtraque igitur K E, M G à ſectione ad diametrum erit ordinatim, & in angulo recto applicata: ideoq; & ipſis æquidiſtantes ſectionum parametri ad ipſas D I, F H tranſuerſas diametros in angulo etiam recto applicabuntur. Quare, ex 9 huius, hyperbola M F N hyperbolæ KDL eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc, & ex definit. Patet binas huiuſmodi eaſdem inuicem K D L, M F N hyperbolas ſubcontrarias eſſe coni A B C ſectiones, & in eiuſdem ſuperficie ſubcontrariè inuicem eſſe poſitas.

MONITVM.

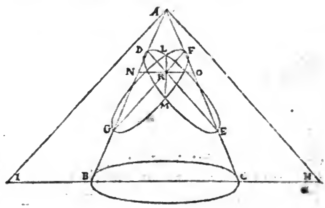
Non inutile, nec ſpatio huic, alioqui lineis vacuo futuro, inconueniens duximus hìc adnotaſſe. Subcontrariæ ſectionis definitionem noſtram propoſitioni 3 *primi libri præmiſſam, hactenus fortè non ſatis notam, fieri iam conſpicuam, & planam. Vt intelligamus, non ſolùm à plano baſi coni ſubcontrariè poſito eandem, aut ſimilem in eiuſdem coni ſuperficie fieri ſectionem ſubcontrariam, quæ circuli ſit circumferentia, quod eadem* 3 *primi oſtenſum eſt: ſed & à binis quibuſlibet planis inuicem tantùm, non etiam baſi coni ſubcontrariè poſitis binas fieri*

Digitized by Google

poſſe ſectiones eaſdem inuicem, aut ſimiles, quæ in eiuſdem coni ſuperficie ſubcontrariè inuicem ſint poſitæ. Quod è ſubcontraria planorum poſitione ad angulum verticalem externum, de binis iiſdem inuicem hyperbolis demonſtrauit iam theorema proximè antecedens: & è ſubcontraria ad angulum verticalem internum poſitione, de binis iiſdem inuicem ellipſibus proximè ſequens etiam comprobabit. De ſimilibus autem illud idem etiam ſuo tandem notum occurret loco.

THEOR. XII. PROP. XIII.

Si conus iam plano ſectus per axem ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum per axem rectis, formantibuſque in ſuperficie binas ellipſes, quarum tranſuerſæ diametri conſtituant ad internum eiuſdem per axem trianguli verticalem angulum bina triangula ſimilia, & ęqualia; erit factarum huiuſmodi binarum ellipſium altera alteri eadem.



Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui per axem ad rectos baſi BC angulos ſectus plano faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibuſque in ſuperficie binas DME, FMG ellipſes, quarum tranſuerſæ diametri ſint DE, FG, quæ conſtituant bina ADE, AFG triangula ſimilia & æqualia. Dico ellipſim FMG ellipſi DME eſſe eandem.

Ducantur enim à vertice BAC trianguli ad eiuſdem baſim BC productam ipſis DE, FG æquidiſtantes AH, AI. Igitur, ex 11 huius, vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita erit AI quadratum ad BIC rectangulum. Sed vt AH quadratum ad BHC rectangulum, ita eſt DE tranſuerſa ellipſeos DME diameter ad contiguam parametrum: & vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt FG tranſuerſa ellipſeos FMG diameter ad parametrum contiguam: igitur vt DE tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum, ita erit FG tranſuerſa diameter ad parametrum contiguam. Sed, propter ęqualia &

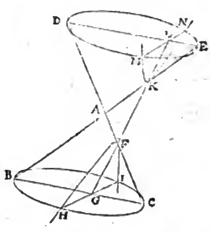
lia & ſimilia ADE, AFG triangula, æqualis eſt FG diameter diametro DE: igitur & ipſis contiguæ parametri erunt inuicem æquales. Sit iam communis planorum per DME, & FMG ſectio recta MKL, & per punctum K ipſis DE, FG diametris commune agatur recta NKO æquidiſtans BC. Quoniam igitur vtrumque per DME, & FMG planum ad triangulum BAC rectum eſt, erit & communis amborum ſectio MKL ad idem triangulum recta, ideoque & ad rectas DE, FG perpendicularis. Eſtque ad idem BAC triangulum etiam rectum baſis coni planum: planum igitur per MNO erit baſi coni æquidiſtans, eritque facta in ſuperficie ſectio NMO circuli circumferentia, cuius erit diameter recta NKO perpendicularis ad MKL. Secta igitur erit bifariam in K recta ML: ideoque & ad vtramq; DK, FK diametrum ordinatim, & in angulo recto erit applicata: quare & eidem æquidiſtantes ſectionum parametri, ipſis DE, FG tranſuerſis diametris contiguæ, in angulo etiam recto applicabuntur. Igitur, ex 9 huius, ellipſis FMG ellipſi DME erit eadem. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc etiam, & ex definit. Patet binas huiuſmodi eaſdem inuicem DME, FMG ellipſes ſubcontrarias eſſe coni ABC ſectiones, & in eiuſdem ſuperficie ſubcontrariè inuicem eſſe poſitas.

THEOR. XIII. PROP. XIIII.

Si oppoſiti coni plano ſecentur non per verticem; erit factarum in vtraq; ſuperficie oppoſitarum hyperbolarum altera alteri eadem.

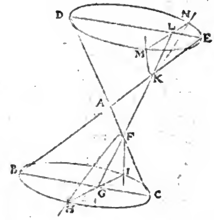


Sint oppoſiti coni ABC, ADE, quorum communis vertex A, baſes BC, DE circuli. Secenturque plano non tranſeunte per verticem, quod faciat in oppoſitis ſuperficiebus oppoſitas HFI, MKN hyperbolas. Dico hyperbolam MKN hyperbolæ HFI eſſe eandem.

Quoniam enim binæ HFI, MKN hyperbolæ ab vno eodemq; plano in oppoſitis ſuperficiebus ſunt factæ, erit, per 43 primi huius, vtrique communis tranſuerſa diameter,

Digitized by Google

& ipſi contigua vnius parameter alterius contiguæ parametro erit æqualis. Quoniam autem ABC, ADE coni ad verticem exiſtunt, erunt illorum baſes, nempe BC, DE circuli, æquidiſtantes inuicem, ex coroll. ad 42 primi huius. Sint earũdem cum plano per H,F,M,N,I communes ſectiones rectæ HI, MN; erunt HI, MN inuicem parallelæ. Secentur iam ABC, ADE coni plano per axem quod communes ſectiones in oppoſitis baſibus faciat rectas BC, DE ad



ipſas HI, MN perpendiculares: ſitque plani triangulorum per axem BAC, DAE cum plano per H,F,M,N,I communis ſectio recta GL occurrens HI in G, & MN in L, hyperbolæque HFI in F, & hyperbolæ MKN in K. Vtraque igitur FG, KL ſuæ ſectionis diameter erit, per 5 primi huius. Quoniam autem vtraque BC, DE circuli diameter eſt, & ad ipſas perpendiculares ſunt HGI, MLN, erit vtraque HI, MN bifariam ſecta, HI quidem in G, & MN in L: ideoque & ad communem GL diametrum vtraque HG, ML ordinatim erit applicata. Eſt autem angulus KLN angulo FGH æqualis: igitur ſub æqualibus vtrobique angulis parameter ad contiguam communem tranſuerſam diametrum applicabitur. Quare, per 9 huius, oppoſitarum HFI, MKN hyperbolarum altera alteri eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

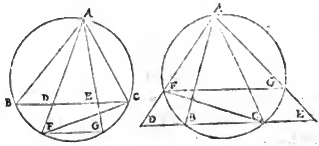
LEMMA II. PROP. XV.

Si propoſiti cuiuſlibet trianguli baſi bis ſectâ, aut vtrinque productâ, eadem ſit vtrobique quadrati rectæ à vertice ductæ ratio ad rectangulum ſub conterminis ſectæ aut productæ baſis partibus; erunt ad verticem ſiue internè vtrinque reſecti, ſiue externè additi vtrinque anguli inuicem æquales.

Sit triangulum BAC, cuius baſis BC ita ſit ſecta, aut vtrinque producta, in D & E, vt ſit eadem quadrati ductæ à vertice rectæ AD ad rectangulum BDC ratio, quæ quadrati ductæ AE ad rectangulum BEC. Dico angulum CAE angulo BAD eſſe æqualem.

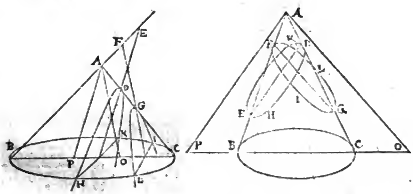
Circumſcribatur enim triangulo BAC circulus ſecans AD, AE ſiue externas, ſiue internas productas, in F & G. Rectangulo igitur

BDC æquale erit rectangulum ADF: & vt AE quadratum ad rectangulum BEC, ita erit AD quadratum ad rectangulum ADF. Sed eadem ratione, cum ſit AEG rectangulum rectangulo BEC æquale, vt AD quadratum ad ADF rectangulum, hoc eſt vt AD ad DF, ita erit AE quadratum ad rectangulum AEG, hoc eſt ita AE ad EG: parallela igitur erit FG ipſi DE, ſiue BC. Quare cum ſint puncta B, C, F, G in circulo, ductâ CF, erit angulus CFG, hoc eſt CAG, vel CAE, æqualis angulo BCF, hoc eſt BAF, ſiue BAD. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XIIII. PROP. XVI.

Si conus plano iam ſectus per axem ad rectos baſi angulos, rurſus duobus planis ſecetur ad triangulum per axem rectis, formantibuſque in ſuperficie coni binas eaſdem inuicem ſiue hyperbolas, ſiue ellipſes; erunt factarum huiuſmodi ſectionum tranſuerſæ diametri ad angulum verticis eiuſdem trianguli, ſiue externum, ſiue internum, ſubcontrariè inuicem poſitæ.

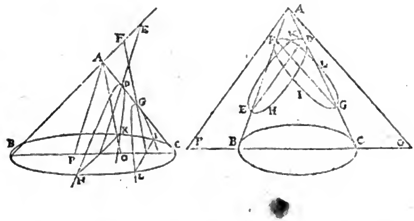


Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui ſectus plano per axem ad baſim recto faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur duobus planis ad triangulum BAC rectis, formantibuſque in ſuperficie binas HDK, IGL ſiue hyperbolas, ſiue ellipſes, eaſdem inuicem, quarum tranſuerſæ diametri ſint DE, GF. Dico diametros DE, GF ad A verticalem trianguli BAC angulum, ſiue externum, ſiue internum, ſubcontrariè inuicem eſſe poſitas.

Cadant enim ab A vertice trianguli ad baſim BC ipſis FG, DE

Digitized by Google

parallelæ A O, A P. Quoniam igitur binæ H D K, I G L ſectiones eędem ſunt inuicem; & vtrumque per ipſas planum ad triangulum B A C rectum eſt, erunt tranſuerſæ ipſarum diametri FG,



D E axes, ideoq; inuicem æquales, atque etiam rectæ parametri æquales inuicem, ex 10 huius: quare & vtrobique eadem erit tranſuerſi axis ad rectam parametrum ratio. Sed vt tranſuerſa F G diameter ad contiguam parametrum, ita eſt, ex 14 primi huius, A O quadratum ad B O C rectangulum: & vt tranſuerſa D E diameter ad contiguam parametrum, ita eſt A P quadratum ad B P C rectangulum: igitur vt A O quadratum ad B O C rectangulum, ita erit A P quadratum ad B P C rectangulum. Quare, ex antecedente, angulus B A P, hoc eſt A E D, angulo CAO, hoc eſt AGF, erit æqualis. Et communis eſt ad A angulus: triangulum igitur A G F triangulo A D E ſimile erit. Non ſunt autem baſes F G, D E æquidiſtantes inuicem, quoniam neque A G æquidiſtans eſt A P: igitur &, ex definit. triangulum A G F triangulo A D E ſubcontrariè erit poſitum. Quare & recta FG ad communem verticalem angulum, ſiue externum, ſiue internum, rectæ D E ſubcontrariè etiam erit poſita. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Hinc patet, Binarum huiuſmodi earumdem inuicem HDK, IGL hyperbolarum, ſiue ellipſium, plana ad idem per axem ſecti ABC coni triangulum recta, & ab eo ad verticis angulum, ſiue externum, ſiue internum, abſcindentia bina triangula A D E, A F G ſimilia baſes habentia non parallelas, ad coni verticem ſubcontrariè inuicem eſſe poſita: ideoque & ipſas H D K, I G L ſectiones ab ipſis factas ſubcontrarias eſſe eiuſdem A B C coni ſectiones, ex definit.

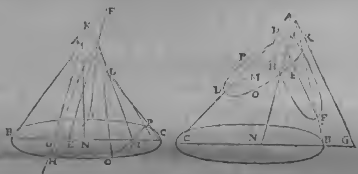
THEOR.

Digitized by Google

THEOR. XV. PROP. XVII.

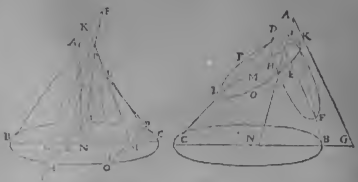
Si conus iam plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, ſecetur rurſus alio plano ad triangulum per axem recto, formante in ſuperficie ſectionem quæ ſit hyperbole vel ellipſis: diameter autem ſectionis biſecanti angulum verticis eiuſdem trianguli non ſit æquidiſtans, neque perpendicularis; erit factæ in ſuperficie ſectioni altera in eadem ſuperficie ſectio eadem & ſubcontrariè poſita.

Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui plano iam per axem ſectus faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem HDI hyperbolam, ſiue ellipſim, cuius diameter ſit DE: ſecet autem angulum BAC bifariam recta AN, & ei non æquidiſtet DE, neque ſit perpendicularis. Dico hyperbolæ, vel ellipſi, HDI alteram in eadem ſuperficie hyperbolam, vel ellipſim, eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam.



Ducatur enim AG æquidiſtans DE. Quoniam igitur DE non æquidiſtat AN, neq; eidem eſt perpendicularis; erit ad vtramq; ſectionem angulus ADF angulo AFD maior vel minor: ideoq; & recta AF maior vel minor quam recta AD. Fiat igitur AK æqualis AD & AL æqualis AF: iungaturq; KL, & vbi opus producatur. Trianlum igitur AKL triangulo ADF ſimile erit & æquale. Intelligatur itaque ABC conus rurſus per rectam KL vtrique AB, AC cruri occurrentem ſecari, plano ad triangulum BAC recto, quod in ſuperficie faciat ſectionem OLP. Siquidem KL vltra verticem trianguli BAC ipſis AB, AC occurrit; erit OLP ſectio hyperbola, ex definit. ſin autem infra verticem; erit OLP ſectio ellipſis. Qoniam autem ABC conus plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos, rurſus etiam ſecatur duobus planis ad triangulum per axem rectis, ſecundum binas FD, KL rectas lineas quæ vtrique

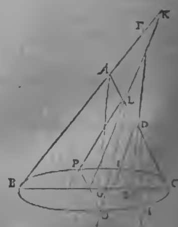
AB, AC lateri occurrentes bina conſtituunt AKL, ADF triangula ſimilia & æqualia: ſuntq; ab eiuſmodi planis factæ in ſuperficie coni ſectiones HDI, OLP hyperbolæ, ſiue ellipſes; erit, ex 12 & 13 huius, altera alteri hyperbola, ſiue ellipſis, eadem: ideoque &, ex coroll. anteced. etiam altera alteri ſubcontrariè poſita. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Si conus iam plano ſectus per axem ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur alio plano ad triangulum per axem recto, formante in ſuperficie ſectionem quæ ſit hyperbole: diameter autem ſectionis biſecanti angulum verticis eiuſdem trianguli ſit æquidiſtans; erit facta eiuſmodi hyperbola ſingularis ſectio: nec alteri hyperbolæ in eadem ſuperficie ſubcontrariè erit poſita.

Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui ſectus iam per axem ad rectos baſi BC angulos, plano faciente triangulum BAC, rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, formante in ſuperficie hyperbolam HDI, cuius diameter ſit DE, cui æquidiſtans ponatur AG: ſecet autem AG angulum BAC bifariam. Dico hyperbolam HDI ſingularem eſſe ſectionem, nec alteri hyperbolæ in eadem ſuperficie ſubcontrariè eſſe poſitam.



Si enim fieri poteſt, ſit altera OLP hyperbola ipſi HDI hyperbolæ ſubcontrariè poſita. Sitque DF tranſuerſa hyperbolæ HDI diameter: & KL tranſuerſa diameter hyperbolæ OLP. Vtrumque igitur per HDI, & OLP planum ex definit. ad idem BAC triangulum erit rectum: abſciſſumque LAK triangulum abſciſſo FAD triangulo ſimile erit, & ad communem externum DAF angulum ſubcontrariè poſitum. Quoniam autem & FDE diameter parallela eſt AG, & ſunt BAG, GAC anguli æquales: erunt & anguli AFD, ADF etiam æqua-

les. Iſoſceles igitur erit triangulum F A D: quare & eidem ſimile L A K triangulum etiam iſoſceles erit, baſiſque K L baſi D F erit æquidiſtans: ideoque & vtrumque L A K, F A D triangulum ad communem A verticem ſimiliter erit poſitum. Sed iam & ſubcontrariè alterum alteri poſitum oſtenſum eſt: igitur & ſubcontrariè, & ſimiliter erit poſitum, quod eſt abſurdum. Hyperbola igitur OLP hyperbolæ H D I ſubcontrariè poſita non erit. Sed & idem de quacunque alia hyperbola demonſtrabitur: quare hyperbola H D I ſingularis erit coni A B C ſectio, nec alteri ſubcontrariè poſita. Quod erat demonſtrandum.

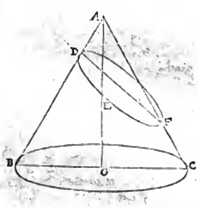
COROLL.

Hinc ſequitur, Hyperbolam O L P hyperbolæ H D I non eſſe eandem.

Quoniam &, ex 16 huius, ſequeretur tranſuerſam KL diametrum tranſuerſæ D F diametro ſubcontrariè ad communem A verticalem angulum eſſe poſitam: ideoque & triangulum L A K triangulo FAD eſſe ſubcontrariè poſitum. Quod abſurdum oſtenſum eſt.

THEOR. XVII. PROP. XIX.

Cuicunque in cuiuſlibet coni recti ſuperficie ſectę ellipſi, altera in eadem ſuperficie ellipſis eadem eſt, & ſubcontrariè poſita.



Sit conus quilibet rectus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, in cuius ſuperficie ſecta ſit ellipſis quæcunque DEF. Dico ellipſi DEF alteram in eadem ſuperficie ellipſim eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam.

Intelligatur enim conus A B C ſectus plano per axem ad planum per D E F recto, quod faciat triangulum B A C, cuius communis cum plano per D E F ſectio ſit recta DF, tranſuerſa ſcilicet ellipſeos DEF diameter. Sumptoque baſis coni centro G, ducatur AG, quæ axis erit coni. Quoniam igitur conus A B C rectus eſt, erit B A C triangulum per axem iſoſceles, & ad baſim coni rectum: rectaque AG baſim BC bifariam ſecans etiam & angulum BAC bifariam ſecabit. Sed ad idem BAC triangulum etiam rectum eſt planum per D E F: & non eſt baſi B C æquidiſtans, ideoque neque D F æquidiſtans BC, neque perpendicularis ad A G: Igitur, ex 17 huius, ellipſi D E F altera in eadem ſuperficie ellipſis eadem erit, & ſubcontrariè poſita. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

THEOR. XVIII. PROP. XX.

Si conus ſcalenus plano iam ſectus per axem ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur plano ad triangulum per axem recto, formante in ſuperficie ſectionem quæ ſit ellipſis: diameter autem ſectionis biſecanti angulum verticis eiuſdem trianguli ſit perpendicularis; erit facta huiuſmodi ellipſis ſingularis ſectio: nec alteri in eadem ſuperficie ſubcontrariè erit poſita.



Sit conus A B C ſcalenus, cuius vertex A, baſis B C circulus, qui per axem iam ſectus ad rectos baſi B C angulos plano faciente triangulum B A C ſcalenum, rurſus ſecetur plano ad triangulum BAC recto, formante in ſuperficie ellipſim DHF, cuius tranſuerſa diameter ſit D F: ducta autem A G angulum B A C bifariam diuidens ſit ad D F perpendicularis. Dico ellipſim D H F ſingularem eſſe ſectionem, nec alteri ellipſi in eadem ſuperficie ſubcontrariè eſſe poſitam.

Si enim fieri poteſt, ſit altera K H L ellipſis ipſi D H F ſubcontrariè poſita, cuius tranſuerſa diameter ſit K L. Vtrumque igitur per D H F, & KHL planum, ex definit. ad triangulum BAC rectum erit: triangulumque LAK triangulo FAD erit ſimile, & ſubcontrariè poſitum. Quoniam autem AG recta angulum BAC bifariam diuidit, & ad eam perpendicularis eſt D F, erunt anguli A D F, A F D inuicem æquales, triangulumque F A D iſoſceles erit: quare & eidem ſimile L A K triangulum etiam erit iſoſceles: ideoque baſis K L baſi D F erit æquidiſtans: & vtrumque L A K, FAD triangulum ad communem A verticalem angulum ſimiliter erit poſitum. Sed & ſubcontrariè iam alterum alteri poſitum oſtenſum eſt: igitur & ſubcontrariè, & ſimiliter poſitum erit, quod eſt abſurdum. Ellipſis igitur K H L ellipſi D E F ſubcontrariè poſita non erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Atque hinc etiam patet, Ellipſim K H L ellipſi DEF non eſſe eandem.

Siquidem

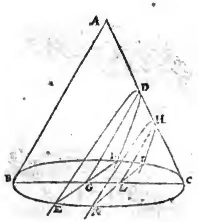
Siquidem, ex 16 huius, tranſuerſa K L diameter tranſuerſæ D F diametro ad communem A verticis angulum ſubcontrariè eſſet poſita: ideoq; & triangulum L A K triangulo F A D ſubcontrariè poſitum. Quod abſurdum oſtenſum eſt.

COROLL. II.

Ex proximè demonſtratis igitur patet. Quoniam vniuſcuiuſque trianguli ad communem verticis angulum duplex tantùm reliquorum binorum angulorum fieri poteſt poſitionis permutatio, pro duplici tantùm baſis ad permutatos reliquorum laterum terminos aptatione: ideo non plures etiam quàm binas fieri poſſe in eodem coni per axem ſecti triangulo ſubcontrarias ſectiones: itaq; nec plures quam binas exhiberi poſſe hyperbolas, aut ellipſes, in eodem trianguli per axem ſecti coni latere vertices habentes, quæ eædem ſint inuicem.

THEOR. XIX. PROP. XXI.

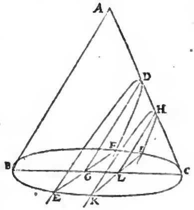
Si conus binis æquidiſtantibus planis ſecetur; non erit factarum in ſuperficie binarum ſectionum altera alteri eadem.



Sit conus A B C, cuius vertex A, baſis B C circulus, qui duobus per E D F, & KHI planis æquidiſtantibus ſecetur: & ſint factæ in eius ſuperficie binæ quæcunque E D F, K H I ſectiones. Dico ſectionem KHI ſectioni E D F non eſſe eandem.

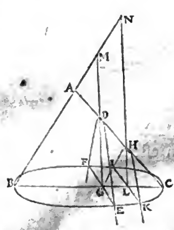
Si enim fieri poteſt, ſit altera alteri ſectio eadem. Quoniam igitur plana per E D F, & K H I æquidiſtant inuicem; erunt amborum communes cum baſe coni, aut ipſi æquidiſtante plano, ſectiones E F, K I inuicem æquidiſtantes. Secetur itaq; A B C conus plano per axem quod faciat communem cum baſe coni, aut ipſi æquidiſtante plano, ſectionem rectam BC ad ipſas EF, K I perpendicularem: ſintque communes eiuſdem per axem plani cum planis per E D F & K H I ſectiones rectæ D G, H L, ſectio-

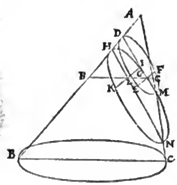
num ſcilicet EDF, KHI diametri, quæ & æquidiſtantes erunt inuicem. Igitur, quoniam vtraque EF, KI perpendicularis eſt ad BC baſis coni, aut circuli ipſi æquidiſtantis, diametrum; erit & vtraq; EF, KI ab eadem BC, aut ipſi æquidiſtante diametro, bifariam ſecta, EF quidem in G, & KI in L. Quare & EG ad DG diametrum ordinatim erit applicata, vt & KL ad diametrum HL. Sunt autem & binæ DG, GE binis HL, LK ęquidiſtantes, ideoque & angulus HLK angulo DGE



æqualis: igitur, per 10 huius, binarum EDF, KHI ſectionum æquales erunt reſpondentes ipſis DG, HL diametris ſiue parametri inuicem, ſiue tranſuerſę diametri inuicem. Sint itaque primùm binæ EDF, KHI ſectiones parabolæ. Igitur, ex 12 primi huius, vt BAC rectangulum ab BC quadratum, ita erit recta AD ad contiguam ipſi DG diametro parametrum: & ita AH ad reſpondentem diametro HL parametrum. Maior autem eſt AH quàm AD: igitur & maior erit parabolæ KHI parameter diametro HL contigua, quàm parabolæ EDF diametro DG contigua parameter. Sed & iam oſtenſæ ſunt æquales inuicem: igitur & æquales erunt & inæquales. Quod eſt abſurdum. Non erit igitur parabola KHI parabolæ EDF eadem.

Sint iam binæ EDF, KHI ſectiones hyperbolæ, aut ellipſes, producanturq; ipſarum diametri DG, HL in M & N, vt ſint DM, HN tranſuerſæ earundem EDF, KHI ſectionum diametri. Quoniam igitur & AH maior eſt quàm AD; erit & tranſuerſa diameter HN maior quàm DM. Sed & ęquales etiam iam ſunt oſtenſæ: igitur & æquales erunt & inęquales. Quod item abſurdum eſt. Binarum igitur in eiuſdem coni ſuperficie à duobus ęquidiſtantibus planis factarum ſectionum altera alteri eadem non erit. Quod erat demonſtrandum.



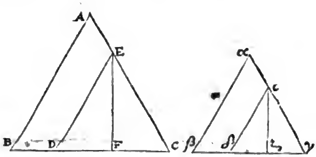


COROLL.

Igitur, Neque ſi proponantur binæ quæcunque in eiuſdem coni ſuperficie ſectiones æquidiſtantes inuicem, altera alteri eadem erit.

LEMMA. III. PROP. XXII.

Si ſint bina triangula iſoſcelia, quorum baſes ſint in eadem ratione ſectæ, & vtrobique à ſectionis puncto ad crus alterutrum rectâ alteri ductâ parallelâ, eadem ſit vtrobique rectanguli ſub baſis partibus ad quadratum parallelæ ratio; erit alterum alteri triangulum ſimile.

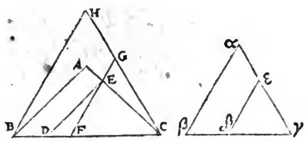


Sint bina ABC, αβγ triangula iſoſcelia, quorum baſes BC, βγ ita ſectæ ſint in D, & δ, vt ſit βδ ad δγ, veluti & BD ad DC: ductis autem DE, δε ipſis BA, βα parallelis, vt BDC rectangulum ad DE quadratum, ita ſit βδγ rectangulum ad δε quadratum. Dico triangulum αβγ triangulo ABC eſſe ſimile.

Cadant enim perpendiculares EF, εζ. Igitur cum ſit βδ ad δγ, vt BD ad DC; erit βδ ad δζ, vt BD ad DF. Sed vt BD ad DC, ita eſt BD quadratum ad BDC rectangulum: & vt βδ ad δγ, ita eſt βδ quadratum ad βδγ rectangulum: vtque BDC rectangulum ad DE quadratum, ita eſt βδγ rectangulum ad δε quadratum: igitur, ex æquali, vt BD quadratum ad DE quadratum, ita erit βδ quadratum ad δε quadratum: ideoque vt BD ad DE, ita erit βδ ad δε. Sed iam vt BD ad DF, ita oſtenſum eſt eſſe βδ ad δζ: igitur, ex æquali rurſus, vt DE ad DF, ita erit δε ad δζ. Et eſt vterque ad F & ζ angulus rectus: triangulum igitur δεζ triangulo DEF ſimile erit. Quare & duplum δεγ triangulum duplo DEC triangulo, ideoque & totum βαγ triangulum toti BAC triangulo ſimile erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA IV. PROP. XXIII.

Si ſint bina triangula iſoſcelia, quorum baſes ſint ita ſectæ, vt, ductâ vtrobique à ſectionis puncto ad crus alterutrum alteri parallelâ, eadem ſit vtrobique ratio rectanguli ſub baſis partibus ad quadratum parallelæ: non ſit autem baſis partium inuicem eadem vtrobique ratio; non erit alterum alteri triangulum ſimile.



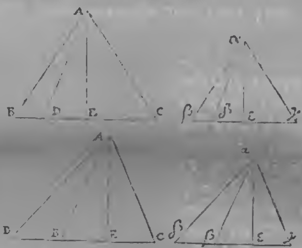
Sint bina BAC, βαγ triangula iſoſcelia, quorum baſes BC, βγ ſectę ſint, illa in D, hæc in δ: ductiſq; DE, δε ipſis BA, βα parallelis, vt rectangulum BDC ad quadratum DE, ita ſit rectangulum βδγ ad quadratum δε: non ſit autem vt BD ad DC, ita βδ ad δγ. Dico triangulum βαγ triangulo BAC non eſſe ſimile.

Si enim fieri poteſt, ſit alterum alteri ſimile. Quoniam & vtrumque iſoſceles eſt, erit verticalis βαγ angulus verticali BAC angulo æqualis. Quoniam autem non eſt BD ad DC, vt βδ ad δγ: fiat vt βδ ad δγ, ita BF ad FC: & vt rectangulum βδγ ad quadratum δε, ita fiat rectangulum BFC ad quadratum FG: ponaturq; CG æqualis FG, & producatur donec ductæ BH æquidiſtanti FG occurrat in H. Æqualis igitur erit & BH rectæ HC: quare vtrumq; FGC, BHC triangulum iſoſceles erit: &, ex antecedente, triangulum BHC triangulo βαγ, ideoq; & triangulo BAC ſimile erit: & verticalis BHC angulus verticali BAC angulo erit æqualis. Sed, quoniam non eſt vt BD ad DC, ita BF ad FC, maior vel minor erit BF quàm BD. Sit primùm maior. Maior igitur erit BF ad FC, hoc eſt BFC rectanguli ad quadratum FC ratio, quàm BD ad DC, hoc eſt BDC rectanguli ad quadratum DC. Sed vt rectangulum BDC ad quadratum DE, ita eſt rectangulum BFC ad quadratum FG: maior igitur, ex æquali, erit GF quadrati ad FC quadratum, hoc eſt HB quadrati ad BC quadratum ratio, quàm ED quadrati ad DC quadratum, hoc eſt AB quadrati ad BC quadratum. Quare maius erit HB quadratum quadrato AB: ideoq; & HB maior quàm AB, & HC maior quàm AC. Igitur & angulus BAC maior erit angulo BHC, hoc eſt angulo βαγ. Sed iam & æqualis eſt oſtenſus: igitur & æqualis erit & maior, quod eſt abſurdum. Similiter

liter & ſi B F minor ſit quàm B D, minor oſtendetur B A C angulus angulo B H C, ſiue $\beta\alpha\gamma$. Neutro igitur caſu triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo B A C erit ſimile. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA V. PROP. XXIIII.

Si ſint bina triangula Iſoſcelia, quorum baſes ſint ſimiliter ſectæ, aut productæ: & ſit vtrobique eadem ratio rectanguli ſub ſegmentis baſis, aut ſub baſe producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductæ à vertice ad ſectionis punctum, aut productæ terminum; erit alterum alteri triangulum ſimile.



Sint bina triangula Iſoſcelia ABC, $\alpha\beta\gamma$, quorum baſes BC, $\beta\gamma$ ſint ita in D & δ ſectæ, aut productæ, vt ſit eadem $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$ ratio, quæ BD ad DC: atq; etiam ductis A D, $\alpha\delta$, eadem ſit rectanguli $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\alpha$ ratio, quæ rectanguli B D C ad quadratum D A. Dico triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo B A C eſſe ſimile.

Cadant enim vtrobique à vertice perpendiculares A E, $\alpha\epsilon$. Quoniam igitur vt B D, ad D C, ita eſt $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$: erit, in ſecta baſe componendo, & in producta diuidendo, ſumptiſque conſequentium dimidiis, vt B D ad B E, ita $\beta\delta$ ad $\beta\epsilon$: rurſuſque, in ſecta diuidendo, & in producta componendo, vt B D ad D E, ita $\beta\delta$ ad $\delta\epsilon$. Eſt autem vt B D C rectangulum ad D A quadratum, ita $\beta\delta\gamma$ rectangulum ad $\delta\alpha$ quadratum: & vt B D C rectangulum ad B D quadratum, ita eſt $\beta\delta\gamma$ rectangulum ad $\beta\delta$ quadratum: igitur, ex æquali, vt B D quadratum ad D A quadratum, ita erit $\beta\delta$ quadratum ad $\delta\alpha$ quadratum: ideoque vt B D ad D A, ita erit $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$. Sed vt B D ad D E, ita iam oſtenſum eſt eſſe $\beta\delta$ ad $\delta\epsilon$: igitur, ex æquali rurſus, vt AD ad DE, ita erit $\alpha\delta$ ad $\delta\epsilon$. Eſtque vterque ad E & ϵ angulus rectus, atque ideo vterque ad A & α minor recto: triangulum igitur $\delta\alpha\epsilon$ triangulo D A E erit ſimile, & angulus $\alpha\delta\epsilon$ angulo A D E erit æqualis, ideoq; & in ſecta baſe reliquus $\alpha\delta\beta$ angulus reliquo A D B etiam æqualis. Sed vt BD ad DA, ita iam eſt $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$: triangulum igitur $\beta\delta\alpha$ triangulo BDA

etiam ſimile erit : quare & in ſecta baſe compoſitum, aut in producta reliquum $\beta\alpha\epsilon$ triangulum compoſito aut reliquo BAE triangulo erit ſimile: ideoque & duplum $\beta\alpha\gamma$ triangulum duplo BAC triangulo ſimile erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA VI. PROP. XXV.

Si ſint bina triangula Iſoſcelia, quorum baſes ſint aut vtraq; ſecta, aut vtraque producta, ita vt ſit eadem vtrobique rectanguli ſub ſegmentis baſis, aut ſub baſe producta & eius exteriori parte, ad quadratum ductæ à vertice ad ſectionis punctum, aut productæ terminum ratio: non ſit autem eadem vtrobique baſis partium inuicem ratio; non erit alterum alteri triangulum ſimile.



Sint bina BAC, $\beta\alpha\gamma$ triangula iſoſcelia, quorum baſes BC, $\beta\gamma$ ſint ſectæ, aut productæ in D & δ: ductiſq; AD, $\alpha\delta$, vt rectangulum BDC ad quadratum DA, ita ſit rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\alpha$: non ſit autem vt BD ad DC, ita $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$. Dico triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo BAC non eſſe ſimile.

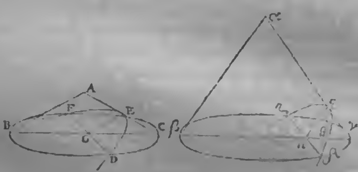
Si enim fieri poteſt, ſit alterum alteri ſimile. Igitur quoniam vtrumque iſoſceles eſt, erit verticalis $\beta\alpha\gamma$ angulus verticali BAC angulo æqualis. Quoniam autem non eſt vt BD ad DC, ita $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$: fiat vt $\beta\delta$ ad $\delta\gamma$, ita BF ad FC: ductaque AE perpendicularis ad BC producatur ad partes A in G, vt ſit rectangulum BFC ad quadratum ductæ FG, veluti rectangulum $\beta\delta\gamma$ ad quadratum $\delta\alpha$: iunganturque GB, GC. Vtrumque igitur BGC, BAC triangulum iſoſceles erit : quare, ex anteced. triangulum BGC triangulo $\beta\alpha\gamma$, ideoque & triangulo BAC erit ſimile : atque verticalis BGC angulus verticali $\beta\alpha\gamma$, hoc eſt BAC angulo erit æqualis. Sed quoniam non eſt vt BD ad DC, ita BF ad FC : maiorque vel minor eſt BF quàm BD : ſit primùm maior : circumſcribaturque triangulo BGC circulus, cuius circumferentia ſecet rectam

G F, aut eidem productæ occurat in H: iunctaque G D circumferentiam ſecet in I, & ductę HK ipſi BC parallelę occurrat in K. Igitur vt GF ad FH, hoc eſt vt GF quadratum ad GFH, ſiue BFC rectangulum, ita erit G D ad D K, hoc eſt ita G D quadratum ad G D K rectangulum. Maior autem eſt hoc caſu D K quàm D I, ideoque & G D K rectangulum maius rectangulo G D I: minor igitur erit G F quadrati ad B F C rectangulum, hoc eſt A D quadrati ad B D C rectangulum ratio, quàm G D quadrati ad rectangulum G D I, ſiue B D C. Quare minus erit quadratum A D quadrato G D: & recta G D maior quàm A D: ideoque & G E maior quàm A E. Sunt autem æquales G B, G C; itemque AB AC: minor igitur erit B G C hoc eſt $\beta\alpha\gamma$, angulus angulo B A C. Sed & ei æqualis iam oſtenſus eſt: igitur & æqualis erit & minor, quod eſt abſurdum. Similiter & ſi B F minor ſit quàm B D, quoniam & hoc caſu D I maior erit quàm D K, ideoque & D A maior quàm D G, & AE maior quàm G E: maior hoc caſu eodem oſtendetur B H C, ſiue $\beta\alpha\gamma$, angulus angulo B A C, quod item abſurdum erit. Quare neutro caſu triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo B A C erit ſimile. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XX. PROP. XXVI.

Cuilibet cuiuſcunque coni ſectioni alterius cuiuſpiam diſſimilis coni ſectio aliqua eadem eſt.

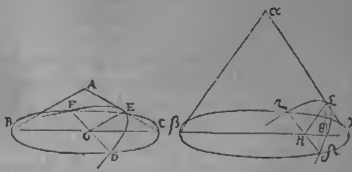
Sit conus quilibet A B C, cuius vertex A, baſis B C circulus: ſitque in eius ſuperficie facta ſectio quæcunque DEF. Dico ſectioni D E F aliquam in alterius diſſimilis, aut ſpecie differentis coni ſuperficie ſectionem eſſe eandem.



Sit enim primùm A B C conus rectus: & communis plani per D E F, & baſis coni ſectio ſit recta D F: ſeceturque A B C conus per axem, & per rectam BC quæ ad DF, aut ipſi æquidiſtantem, ſit perpendicularis, plano faciente triangulum B A C: communiſque plani per DEF, & trianguli BAC ſectio ſit recta E G. Sectionis igitur diameter erit E G: & quoniam D F bifariam ſecta erit in G, erit ad E G diametrum ordinatim applicata DG.

Sit itaque iam ſectio D E F parabola: ideoque & EG diameter

æquidiſtans A B. Expoſita recta $\beta\eta$, neutri B G aut G C æqualis, ſed vel maior vel minor, producta ſit in γ, vt ſit rectangulo B G C, hoc eſt quadrato D G, æquale rectangulum $\beta\eta\gamma$: ſectâque bifariam $\eta\gamma$ in θ, erecta ſit perpendicularis $\theta\epsilon$, cui in puncto ϵ occurrat ab η recta $\eta\epsilon$ æqualis EG: iunctaque $\gamma\epsilon$ & producta ductæ $\beta\alpha$ æquidiſtanti $\eta\epsilon$ occurrat in α. Erit igitur, propter æquales $\eta\theta$, $\theta\gamma$, & perpendicularem $\theta\epsilon$, vtrumque $\eta\epsilon\gamma$ & $\beta\alpha\gamma$ triangulum iſoſceles.

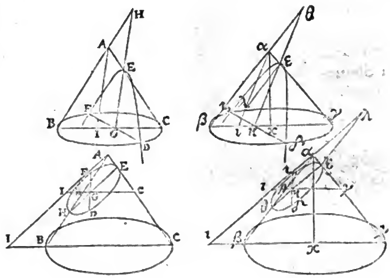


Intelligatur itaque $\alpha\beta\gamma$ conus rectus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, ſectus per axem plano faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$ ad baſim coni rectum, rurſus ſecari per lineam rectam $\epsilon\eta$ rectæ $\alpha\beta$ æquidiſtantem plano ad idem $\beta\alpha\gamma$ triangulum recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem $\delta\epsilon\zeta$ parabolam, cuius ſit diameter recta $\epsilon\eta$. Dico parabolam $\delta\epsilon\zeta$ parabolæ DEF eſſe eandem, & in diſſimili, aut ſpecie differenti cono $\alpha\beta\gamma$ exhibitam.

Quoniam enim vtrumque per $\delta\epsilon\zeta$ & baſis coni planum ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ rectum eſt, erit communis amborum ſectio, ſcilicet recta $\delta\eta\zeta$, ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque $\beta\gamma$, $\epsilon\eta$ perpendicularis, & bifariam ſecta in η. Itaque recta $\delta\eta$ ad $\epsilon\eta$ diametrum ordinatim erit applicata: vt & D G ad diametrum E G: & erit quadratum $\delta\eta$ rectangulo $\beta\eta\gamma$, hoc eſt quadrato D G, æquale: ideoque & ordinata $\delta\eta$ ordinatæ D G æqualis erit. Sed & $\epsilon\eta$ diameter diametro E G eſt etiam æqualis: itemque & vterque E G D, $\epsilon\eta\delta$ angulus rectus: igitur, ex 5 huius, parabole $\delta\epsilon\zeta$ parabolæ D E F eadem erit. Quoniam autem & $\beta\eta$ recta maior minor-ue eſt quàm BG, aut GC; maior erit vel minor $\beta\eta$ ad $\eta\gamma$ ratio, quàm B G ad G C. Suntque ambo triangula B A C, $\beta\alpha\gamma$ iſoſcelia: quare, per 23 huius, non erit triangulum $\beta\alpha\gamma$ triangulo B A C ſimile. Sed & vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: quare, ex definit. conus $\alpha\beta\gamma$ cono A B C diſſimilis erit. Sed neque exiſtente cono A B C ſcaleno, expoſitus $\alpha\beta\gamma$ conus ei ſimilis erit: propoſitæ igitur D E F coni A B C ſectioni, ſiue parabolæ, altera $\delta\epsilon\zeta$ parabola in diſſimilis, aut ſpecie differentis $\alpha\beta\gamma$ coni ſuperficie exhibita eadem eſt.

Sit iam propoſita coni A B C ſectio D E F hyperbola, vel ellipſis, eiuſque diameter E G, & ad ipſam ordinatim applicata D G. Producta igitur E G diameter vtrique AB, AC cruri occurret. Occurrat in H. Tranſuerſa igitur vtriuſque ſectionis diameter erit EH. Eidem à

dem à vertice ad baſim BC æquidiſtans ducatur AI: & expoſita recta $\beta\iota$ neutri BI aut IC ęqualis, ſed earum vnaquâq; vel maior vel minor, producta ſit in γ, ita vt rectangulo BIC æquale ſit rectangulum $\beta\iota\gamma$: ſectâque bifariam rectâ $\beta\gamma$ in κ, erecta perpendicularis $\kappa\alpha$ ſit eiuſmodi vt iuncta $\iota\alpha$ ſit æqualis IA: iūctis igitur $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, erit $\beta\alpha\gamma$ triangulum iſoſceles. Sumpta autem

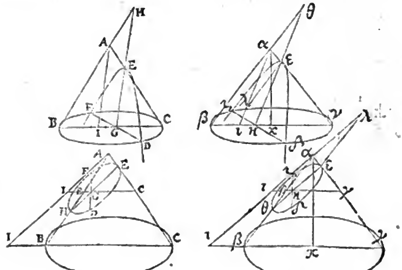


in $\alpha\iota$, ſi opus eſt producta, recta $\alpha\lambda$ æquali HE, ductaque $\lambda\varepsilon$ æquidiſtante $\alpha\beta$, quæ occurrat $\alpha\gamma$ in ε, ducatur etiam $\varepsilon\theta$ æquidiſtans $\iota\alpha$: intelligaturque $\alpha\beta\gamma$ conus rectus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$ ad baſim coni rectum, rurſus ſecari ſecundum lineam rectam $\varepsilon\theta$ vtrique $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ cruri occurrentem, plano ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ recto, faciente in ſuperficie ſectionem $\delta\varepsilon\zeta$ hyperbolam, vel ellipſim, cuius ſit tranſuerſa diameter $\varepsilon\theta$. Dico hyperbolam, vel ellipſim $\delta\varepsilon\zeta$ hyperbolæ, vel ellipſi DEF eſſe eandem, ſed in diſſimili & differenti $\alpha\beta\gamma$ cono exhibitam.

Sit enim plani per $\delta\varepsilon\zeta$ & baſis coni, aut circuli ipſi æquidiſtantis, communis ſectio recta $\delta\eta\zeta$. Quoniam vtrumque per $\delta\varepsilon\zeta$ & baſis coni planum ad triangulum $\beta\alpha\gamma$ eſt rectum, erit & recta $\delta\eta\zeta$ ad $\beta\gamma$, aut ipſi æquidiſtantem, & ad $\varepsilon\eta$ perpendicularis, ideoq; & bifariam ſecta in η: quare & $\delta\eta$ ad $\varepsilon\eta$ diametrum ordinatim erit applicata, vt & DG ad diametrum EG. Quoniam autem vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt $\alpha\iota$ quadratum ad $\beta\iota\gamma$ rectangulum: &, propter vtramque ſectionem, vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt ſectionis DEF tranſuerſa diameter EH ad contiguam parametrum: atq; etiam vt $\alpha\iota$ quadratum ad $\beta\iota\gamma$ rectangulum, ita eſt ſectionis $\delta\varepsilon\zeta$ tranſuerſa diameter $\varepsilon\theta$ ad contiguam parametrum; vt ſectionis DEF tranſuerſa diameter EH ad contiguam parametrum, ita erit ſectionis $\delta\varepsilon\zeta$ tranſuerſa diameter $\varepsilon\theta$ ad contiguam parametrum: & permutatim. Suntque tranſuerſæ EH, $\varepsilon\theta$ diametri inuicem æquales, quoniam in parallelogrammo $\lambda\theta$ recta $\varepsilon\theta$ æqualis eſt $\alpha\lambda$, hoc eſt HE: igitur & ſectionis vnius

Digitized by Google

parameter alterius ſectionis parametro erit æqualis. Sed &, propter vtrumque E G D, ε η δ angulum rectum, vtraq; E G, ε η diameter etiam axis eſt: igitur, per 9 huius, ſectio δ ε ζ hyperbola, ſiue ellipſis, ſectioni D E F hyperbolæ, ſiue ellipſi, erit eadem.



Quoniam autem & recta βι neutri B I aut I C æqualis eſt, maior erit vel minor βι ad ιγ ratio quàm B I ad I C, aut C I ad I B: ſuntque rectangula B I C, βιγ inuicem æqualia, vt & quadrata I A, ια inuicem, ideoque vt B I C rectangulum ad I A quadratum, ita eſt rectangulum βιγ ad quadratum ια: & ſunt ambo B A C, βαγ triangula iſoſcelia, quoniam & vterque A B C, αβγ conus eſt rectus: igitur, ex antecedente, triangulum βαγ triangulo B A C non erit ſimile. Sed vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: igitur, ex definit. neque conus αβγ cono A B C ſimilis erit. Exiſtente autem cono A B C ſcaleno, multo minùs expoſitus αβγ conus rectus ei ſimilis erit: propoſitæ igitur cuiuſcunque A B C coni ſectioni D E F altera δεζ ſectio in diſſimilis aut ſpecie differentis αβγ coni ſuperficie exhibita eſt eadem. Quare conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

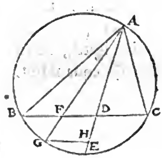
COROLL.

Ex hujus theorematis apparatu & ποεισμῷ, ſatis patet, Data quacunque coni ſectione conum exhiberi poſſe in quo ſit ſectio datæ eadem: atque ideo cum proponetur data parabola, aut hyperbola, ſiue ellipſi, conum exhibere cuius ſit ſectio; inuenta recta ſectionis parametro, & inſuper in hyperbola & ellipſi etiam tranſuerſo axe, omnino ex eodem huius theorematis apparatu problemati ſatisfactum iri.

Digitized by Google

LEMMA VII. PROP. XXVII.

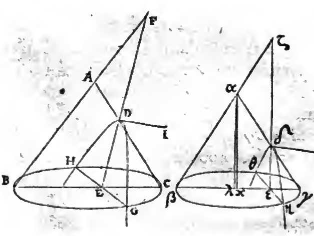
Si à vertice cuiuſcunque trianguli rectæ lineæ quotlibet ad baſim ducantur; minor erit ratio quadrati eius quæ angulum bifariam diuidet ad rectangulum ſub ſegmentis baſis ab ipſa factis, quàm quadrati cuiuſuis aliæ ad rectangulum ſub ſibi conterminis baſis ſegmentis.



Sit quodlibet triangulum BAC, à cuius vertice A ad baſim BC binæ, aut quotlibet, rectæ ducantur AD AF: ſecet autem AD angulum BAC bifariam. Dico minorem eſſe rationem quadrati AD ad rectangulum BDC, quàm quadrati AF ad rectangulum BFC. Triangulo enim BAC circumſcribatur circulus: & producantur AD, AF ad circumferentiam in E & G: atque à puncto G ducatur GH parallela BC. Erit igitur DH minor quàm DE, & vt AD ad DH, hoc eſt vt AD quadratum ad ADH rectangulum, ita erit AF ad FG, hoc eſt ita AF quadratum ad AFG, ſiue BFC, rectangulum. Sed rectangulo ADH maius eſt rectangulum ADE, ſiue BDC: minor erit igitur ratio AD quadrati ad BDC rectangulum, quàm AF quadrati ad BFC rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

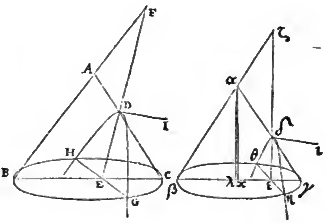
THEOR. XXI. PROP. XXVIII.

Non cuilibet cuiuſcunque coni hyperbolæ, alterius cuiuſlibet coni hyperbola aliqua eadem eſt.



Sit cuiuſcunque ABC coni ſectio hyperbola quælibet GDH, cuius vertex D, tranſuerſus axis DF, & recta parameter DI. Expoſituſque $\alpha\beta\gamma$ conus, cuius vertex α, baſis $\beta\gamma$ circulus, ſit eiuſmodi, vt cum ſectus fuerit plano per axem ad baſim recto, atq; à vertice ad baſim recta ducetur $\alpha\kappa$ angulum $\beta\alpha\gamma$ bifariam diuidens, maior ſit quadra-

ti $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$ ratio, quàm F D tranſuerſi axis ad D I rectam parametrum. Dico nullam in expoſiti $\alpha\beta\gamma$ coni ſuperficie ſecari poſſe hyperbolam, quæ propoſitæ G D H hyperbolæ ſit eadem.



Si enim fieri poteſt, ſit aliqua $\eta\delta\theta$ hyperbola coni $\alpha\beta\gamma$ ſectio ipſi GDH hyperbolæ eadem, cuius trãſuerſus axis ſit $\zeta\delta$, & recta parameter $\delta\iota$. Erit igitur, ex 10 huius, $\zeta\delta$ æqualis FD, & $\delta\iota$ æqualis D I, ideoq; & eadem $\zeta\delta$ ad $\delta\iota$ ratio, quæ FD ad DI. Sit itaq; plani per $\eta\delta\theta$ & baſis coni $\alpha\beta\gamma$ ſectio communis recta $\eta\epsilon\theta$. Seceturq; $\alpha\beta\gamma$ conus plano per axem faciente triangulum $\beta\alpha\gamma$, cuius baſis $\beta\gamma$ ſit ad rectam $\eta\epsilon\theta$ perpendicularis: communiſque eiuſdem trianguli & plani per $\eta\delta\theta$ ſectio ſit recta $\epsilon\delta$, quæ producta occurrat cruri $\beta\alpha$ producto in ζ: eique primùm æquidiſtet $\alpha\kappa$. Igitur vt quadratum $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$, ita erit tranſuerſus axis $\zeta\delta$ ad $\delta\iota$ rectam parametrum. Maior autem eſt ratio quadrati $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$, quàm tranſuerſi axis FD ad DI rectam parametrum: maior igitur erit ratio tranſuerſi axis $\zeta\delta$ ad parametrum $\delta\iota$, quàm tranſuerſi axis FD ad parametrum DI. Sed & iam oſtenſa eſt eadem: igitur & eadem erit & maior. Quod eſt abſurdum.

Non æquidiſtet autem $\alpha\kappa$ rectæ $\zeta\delta$: ipſique $\zeta\delta$ æquidiſtans ducatur $\alpha\lambda$. Quoniam igitur recta $\alpha\kappa$ angulum $\beta\alpha\gamma$ biſariam diuidit, maior erit, ex antecedente, ratio quadrati $\alpha\lambda$ ad rectangulum $\beta\lambda\gamma$, quàm quadrati $\alpha\kappa$ ad rectangulum $\beta\kappa\gamma$. Sed vt $\alpha\lambda$ quadratum ad rectangulum $\beta\lambda\gamma$, ita eſt tranſuerſus axis $\zeta\delta$ ad rectam parametrum $\delta\iota$: multo igitur maior erit tranſuerſi axis $\zeta\delta$ ad rectam parametrum $\delta\iota$ ratio, quàm tranſuerſi FD axis ad rectam parametrum DI. Quare idem quoque abſurdum ſequetur. Nulla igitur coni $\alpha\beta\gamma$ hyperbola propoſitæ GDH hyperbolæ eadem erit. Quare conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

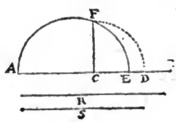
Ex hactenus demonſtratis ſatis patet, Cuiuſcunque coni recti acutanguli hyperbolam etiam coni recti rectanguli aut obtuſanguli eſſe ſectionem: ſed non conuerſim. Nam ab acutangulo

Digitized by Google

acutangulo minore cono recto infiniti deinceps obtuſiores vnam eandemq; exhibebunt hyperbolam, quam nullus ſpecie minor, aut ad verticem acutior continebit. Quod idem de conis ſcalenis a planis ad rectos baſibus angulos per axem ſectis etiam verum eſſe ex præmiſſis liquidò conſtat.

LEMMA VIII. PROBL. I. PROP. XXIX.

Datam rectam bifariam ſectam iterum ſecare, vt rectangulum ſub inæqualibus totius ſegmentis ad quadratum interſegmenti datam teneat rationem.



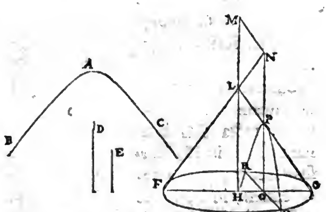
Sit recta A B bifariam ſecta in C, iterumque ſecanda in D, vt rectangulum A D B ad quadratum D C ſe habeat vt R ad S.

Fiat vt vtraque R & S ad S, ita A C ad C E: ſitque inter A C & C E media proportionalis C F, cui æqualis ſecetur C D. Dico rectam A B eſſe in D ſectam vt proponitur.

Quoniam enim vt R & S ſimul ad S, ita eſt A C ad C E, hoc eſt ita A C quadratum ad C F, ſiue C D, quadratum; erit, diuidendo, vt R ad S, ita rectangulum A D B ad quadratum C D. Quare ſecta eſt A B in D vt proponitur. Quod facere oportebat.

PROBL. II. PROP. XXX.

Data hyperbola; conum exhibere cuius ſit ſectio ſingularis.

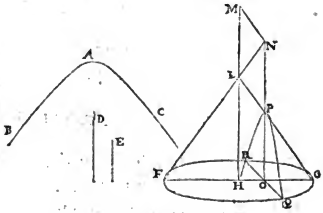


Sit propoſita quæcunque B A C hyperbola, cuius tranſuerſus axis ſit D, & recta parameter E. Oportet conum exhibere cuius hyperbola B A C ſingularis ſit ſectio.

Si quidem conus poſtulatur rectus; expoſita quæcunque recta F G biſariam ſecetur in H;

Digitized by Google

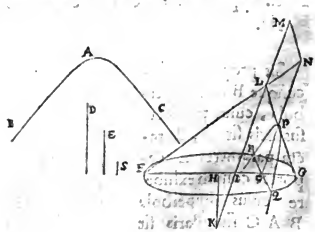
& erectâ perpendiculari HL, cuius quadratum ad rectangulum FHG ſe habeat vt D ad E, iungantur LF, LG: & in producta HL ſumatur LM æqualis tranſuerſo axi D. Ductaque MN æquidiſtante LG, & productæ FL occurrente in N, ducatur NPO æquidiſtans LH, ſecanſque LG in P: intelligaturq; LEG conus rectus, cuius vertex L, baſis FG circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum FLG iſoſceles, rurſus per lineam NPO ſecari plano quod in ſuperficie faciat ſectionem QPR, & in baſe rectam QOR ad FG perpendicularem. Erit vtique QPR ſectio, ex 5. primi huius, hyperbola, cuius tranſuerſus axis erit NP. Dico hyperbolam QPR hyperbolæ BAC eſſe eandem, & coni LFG recti ſingularem eſſe ſectionem.



Quoniam enim NP æquidiſtat LM, itemque MN æquidiſtat LP, erit NP æqualis LM, hoc eſt tranſuerſo axi D. Sed vt D ad E, ita eſt LH quadratum ad FHG rectangulum, & ita NP tranſuerſus axis ad rectam hyperbolæ QPR parametrum: quare erit recta parameter hyperbolæ QPR ipſi E rectæ parametro æqualis. ideoq; &, per 9 huius, hyperbola QPR hyperbolæ BAC eadem erit. Quoniam autem propter æquales FH, HG, perpendicularis LH angulum FLG bifariam diuidit, & ei æquidiſtat NPO ſectionis QPR diameter; erit, ex 18 huius, hyperbola QPR, exhibiti LFG coni ſingularis ſectio.

Poſtuletur iam ſcalenus conus, cuius propoſita BAC hyperbola ſit ſectio ſingularis.

Sumatur recta S minor quàm E. Et expoſita recta FG biſariam ſecta in H, rurſus ſecetur, per antecedentem, in I, ita vt rectangulum FIG ad quadratum IH ſe habeat veluti D ad S: Et vt D ad E, ita fiat FIG rectangulum ad IK quadratum. Maior igitur erit IK quàm IH. Erecta itaque perpendiculari HK, fiat

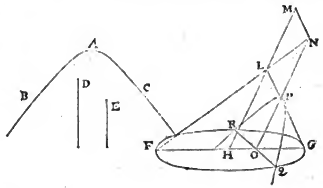


IK anguli IHK recti ſubtenſa, productaque KI in L, vt ſit KI ad IL, veluti E ad D: iungantur LF, LG: productâque KL ad partes L, ſumatur LM æqualis D: ductaque MN æquidiſtante LG, quæ occurrat productæ FL in N, ducatur, NPO æquidiſtans LK, ſecanſq; LG in P. Intelligatur itaque, vt ſupra, LFG conus ſcalenus plano ſectus per axem ad rectos baſi angulos faciente triangulum FLG, rurſus ſecari plano per lineam NPO faciente in ſuperficie hyperbolam QPR, & in baſi coni rectam lineam QOR ad FG eiuſdem baſis diametrum perpendicularem. Erit vtique recta NP tranſuerſus hyperbolæ QPR axis. Dico itaque rurſus hyperbolam QPR hyperbolæ BAC eſſe eandem, & exhibiti LFG coni ſcaleni ſectionem eſſe ſingularem.

Quoniam enim vt D ad E, ita eſt LI ad IK, hoc eſt ita LIK reſtangulum ad IK quadratum: & ita etiam FIG rectangulum ad IK quadratum: ideoque & rectangulum FIG rectangulo LIK eſt æquale; vt LI quadratum ad LIK rectangulum, hoc eſt vt LI ad IK, ſiue vt D ad E, ita erit LI quadratum ad FIG rectangulum: & ita hyperbolæ QPR tranſuerſus axis NP ad rectam parametrum. Eſtq; NP æqualis LM, hoc eſt tranſuerſo axi D: quare & hyperbolæ QPR recta parameter ipſi E rectæ parametro hyperbolæ BAC erit æqualis: ideoque, &, per 9 huius, hyperbola QPR hyperbolæ BAC eadem erit. Iunctæ iam intelligantur FK, KG. Quoniam itaq; propter æqualia FIG, LIK rectangula, vt FI ad IL, ita eſt KI ad IG; & permutando, vt FI ad IK, ita eſt LI ad IG; erunt triangula FIL, KIG, itemque FIK, LIG ad I communem verticem æquiangula ſimilia, ideoq; & anguli FLI, IGK, itemque GLI & IFK inuicem æquales. Sunt autem; propter perpendicularem HK, anguli IFK & IGK inuicem æquales: quare & anguli FLI, GLI etiam inuicem æquales erunt. Recta igitur LI angulum FLG bifariam diuidit. Sed & ei æquidiſtat recta NPO ſectionis QPR diameter: igitur, ex eadem 18 huius, coni LFG ſingularis erit ſectio QPR, hoc eſt BAC, hyperbola. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

FHL obliquus: iunctis autem FL, LG, producatur HL in M, vt ſit LM æqualis D: ductaque MN æquidiſtans ſit LG, & NPO æquidiſtans HL. Intelligatur itaque, vt prius, LFG conus ſcalenus, primùm per axem ad rectos baſi angulos ſectus, plano faciente triangulum FLG ſcalenum, rurſus per rectam NPO, ſecundùm lineam QOP perpendicularem ad FG, ſecari plano formante in ſuperficie ſectionem QPR.

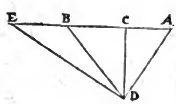


Oſtendetur primò ſectionem QPR hyperbolam eſſe, & propoſitę BAC hyperbolæ eandem. Deinde quoniam, propter inæquales FL, LG, & æquales FH, HG, maior eſt vel minor FL ad LG ratio quàm FH ad HG: ideoque recta LH angulum FLG bifariam non diuidit; demonſtrabitur, ex eadem 17 huius, hyperbolæ QPR aliam in eiuſdem LFG coni ſcaleni ſuperficie hyperbolam eandem eſſe, & ſubcontrariè poſitam. Quare vtroq; caſu, exhibitus eſt LFG conus, cuius hyperbola QPR, hoc eſt propoſita BAC hyperbola, vna eſt è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus. Quod facere oportebat.

LEMMA. IX. PROP. XXXII.

Sit recta linea AB, & ad ipſam perpendicularis CD: ſitque maior CD ad CB ratio, quàm AC ad CD; iunctis AD, BD, Dico angulum ADB eſſe acutum.

Fiat enim vt AC ad CD, ita CD ad CE: iungaturque DE. Rectus igitur erit ADE angulus: & quoniam maior eſt CD ad CB ratio, quàm AC ad CD, hoc eſt CD ad CE: erit CB minor quàm CE: ideoque & angulus CDB minor quàm CDE: quare & totus ADB angulus recto ADE angulo erit minor, hoc eſt acutus. Quod erat demonſtrandum.



COROLL.

Perpendicularis igitur quæ ab A puncto ad rectam BD ducetur, inter puncta B, D cadet.

MONITVM.

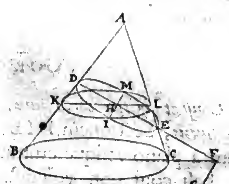
Miraberis fortè, Lector, & noſſe cupies cur theorema hoc proximè ſequens tacuerimus hactenus, quod ſuum in libro primo locum obtinere debuiſſe videri poſſit, vt ibidem ellipſis definitionem noſtram firmaret, ipſamque à circuli circumferentia euidentiùs diſtingueret. Quandoquidem cum è numero coni ſectionum quarum diametri vtriq; cruri trianguli per axem infra verticem occurrunt, cenſeri poſsint illæ quæ à planis aut æquidiſtantibus baſi, aut ipſi ſubcontrariè poſitis fiunt, quas circulorùm circumferentias eſſe ex inibi demonſtratis conſtat; dubitari poterat, num & alia quæpiam à plano baſi non æquidiſtante; neque ſubcontrariè poſito, facta coni ſectio circuli etiam circumferentia dici deberet. Huicque dubio opportunam illic hoc ipſum quod proximè ſequitur theorema medelam, & ellipſeos definitioni firmitudinem allaturum haud dubiè fuerat. Veruntamen, quoniam ſi conus quiſpiam plano iam per axem ſectus, rurſus ſit ſecandus plano quod triangulum per axem ſecet per eius verticem non tranſiens, quintuplex tantùm contingere poteſt plani ad triangulum eiuſmodi poſitio: vt ſcilicet alterutri crurùm trianguli æquidiſtet, aut alterutrum tantùm ſecet alteri vltra verticem occurrens, aut vtrique occurrat infra verticem baſi coni primùm æquidiſtans, aut etiam vtrique ſimiliter occurrat baſi ſubcontrariè poſitum, aut denique vtrique cruri etiam occurrat infra verticem ſed baſi coni neque æquidiſtans neque ſubcontrariè ſit poſitum: ideoque nec plures poſſunt in coni ſuperficie poſt verticalem, ſiue trianguli rectilinei effectricem, fieri ſectiones curuilineæ; earum primâ parabolæ deputatâ & eiuſdem nomine inſignitâ, ſecundâ hyperbolæ, tertiâ & quartâ circuli circumferentiæ, meritò reliqua vni & ſoli ellipſi propria nobis viſa eſt: cui etiam vni & ſoli, ex huiuſmodi ſectionibus à plano vtrique crurum trianguli infra verticem occurrente factis, contigit demonſtrata à nobis propoſit. 49. 50. & 51. cum hyperbola habere communia: qua etiam nota iam potuit à circuli circumferentia ſatis diſtingui, vt quæ binos extra centrum ſortita ſit vmbilicos, quibus circuli circumferentia careat. Sed hoc inſuper conſilio à nobis hoc idem theorema hùc aſſeruatum ſcire te volumus, quo-

Digitized by Google

niam non tam hactenus de proprio ellipſeos nomine ambigendum nobis viſum eſt, neque de indito ita ſollicitos reddi occurrit, vt initam pro ſuſcepta coni ſectionum ortus & propriæ cuiuſque naturæ expoſitione directam & ſimplicem demonſtrationis viam obliqua demonſtrandi huiuſce proximi theorematis methodo inflecteremus: ſatiſque duximus, in primo illo noſtro libro ea quæ ad inſtitutum facerent tibi proponere, & vera ipſa affirmatè euincere: non etiam alia omnia, vel quæ inde deriuari facile poterant, vel quæ ex obliquo incurrere, cuiuſmodi ipſum hoc ſequens theorema cenſemus, ibidem congerere: ſiquidem in immenſum libri moles abiiſſet nimiùm. Ne tamen, dum deinceps aut ellipſibus quibuſcunque datis eaſdem poſtulabis in coni ſuperficie, aut ipſas tibi exhibebimus, vel exhibendi methodum proponemus, dubius hæreas num à nobis propoſito ſit ſatisfactum: neu pro ellipſibus circulorum potiùs circumferentias tibi obtruſuri ſimus: hanc cautionem tunc primùm interponere nobis opportunum viſum eſt.

THEOR. XXI. PROP. XXXIII.

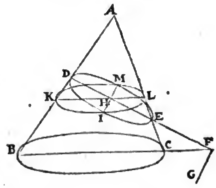
Si conus plano ſecetur quod vtrique crurum trianguli per axem infra eiuſdem verticem occurrat, baſi neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſitum; ſectio circuli circumferentia non erit.



Sit conus ABC, cuius vertex A, baſis BC circulus, qui plano ſecetur quod vtrique crurum cuiuſcunque trianguli per axem infra verticem occurrat, baſi BC neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè poſitum, & faciat in ſuperficie ſectionem DIE. Dico ſectionem DIE circuli circumferentiam non eſſe.

Sit enim, ſi fieri poteſt: & quoniam planum per DIE baſis plano non æquidiſtat, ſit amborum communis ſectio recta FG: ſeceturque ABC conus plano per axem quod faciat triangulum BAC, cuius baſis BC ſit ad rectam FG perpendicularis: communiſque plani per DIE & trianguli BAC ſectio ſit recta DE, in qua ſumpto

quolibet puncto H, ducatur KHL æquidiſtans BC: ſeceturque rurſus ABC conus per rectam KHL plano baſi æquidiſtante, cuius & plani per DIE communis ſectio ſit recta IHM. Erit igitur IHM æquidiſtans FG: & ipſa KIL ſectio circuli erit circumferentia, eiuſque diameter KHL, quæ & ad rectam IHM erit perpendicularis, ipſamque bifariam ſecabit in H. Similiterque & per ſumptum quodcunque aliud rectæ DE punctum recta in ſectione DIE ducta ipſi FG æquidiſtans



bifariam in ipſo ſecari oſtendetur. Quare circuli DIE diameter erit recta DHE: ideoque & recta IHM bifariam ſecta in H ad ipſam erit perpendicularis. Vtrumque igitur DHE & KHL rectangulum quadrato HI erit ſigillatim æquale. Quare vt DH ad HK, ita erit LH ad HE: triangulumque LHE triangulo DHK ſimile erit: quare & angulus LEH, hoc eſt AED, angulo DKH, hoc eſt AKL, ſiue ABC, erit æqualis: ideoque & triangulum AED triangulo AKL, ſiue ABC, ſimile erit, & ſubcontrariè poſitum: rectaque DE rectæ KL ſubcontrariè erit poſita. Et, propter communem planorum per DIE & KIL ſectionem, ſcilicet rectam IHM, ad vtramque KH & DH perpendicularem, erit vtrumque per DIE & KIL, ſiue baſis coni planum ad triangulum DHK, hoc eſt ad BAC triangulum, rectum: ideoq; & alterum alteri ſubcontrariè erit poſitum. Quod eſt abſurdum. Poſitum enim eſt planum per DIE baſi coni neque æquidiſtans neque ſubcontrariè poſitum. Sectio igitur DIE circuli circumferentia non erit. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

Conſtat igitur certò jam, & ex definitionibus & è 6ª primi huius, Sectionem DIE, & huiuſmodi quamcunque aliam à plano vtrique crurum trianguli per axem occurrente, baſi coni non æquidiſtante, neque ſubcontrariè poſito factam, ellipſim eſſe.

COROLL. II.

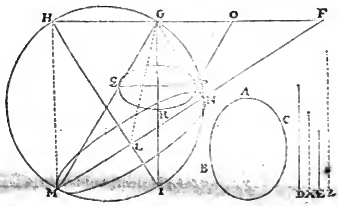
Sed & hoc etiam certò conſtat, In ellipſi ordinatim à ſe-

ctione

ctione ad axem applicatarum quadrata rectangulis ſub conterminis tranſverſi axis partibus non eſſe æqualia. *Si quidem enim rectangulum DHE quadrato HI, hoc eſt rectangulo KHL, eſſet æquale, triangula DHK, LHE eſſent inuicem ſimilia. Quod abſurdum oſtenſum eſt.*

PROBL. IV. PROP. XXXIV.

Data ellipſi; conum exhibere cuius ſit ſectio ſingularis.

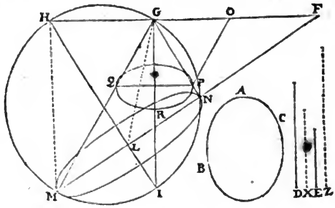


Sit data ellipſis quæcunque BAC, cuius tranſuerſus axis ſit D, & contigua recta parameter E. Oporteat conum exhibere, cuius BAC ellipſis ſit ſectio ſingularis. Si quidem D ſit axis tranſuerſus maior; ſumpta inter D & E media proportionali X, fiat vt E ad D, ita X ad Z: erit, ex 34 primi huius, X eiuſdem BAC ellipſis minor axis tranſuerſus, & Z ipſi contigua recta parameter.

Expoſita igitur recta quæcunque FG producatur in H, vt ſit FG ad FH, veluti X ad Z: erectaque perpendiculari GI eiuſmodi, vt maior ſit GI ad GH ratio, quàm FG ad GI, iungatur HI: deſcriptæque per tria H, G, I puncta circuli circumferentiæ occurrat in M & N recta FM ad HI ducta perpendicularis: hoc autem fieri poſſe ex 32 huius jam conſtat: iunganturque GM, GN: & ſumpta in GF, vbi opus producta, recta GO æquali X, ducatur OP æquidiſtans GM, occurrenſque GN, productæ ſi opus, in P: tum ducta PQ æquidiſtans ſit GF, & occurrat GM in Q. Intelligatur itaque GMN conus, cuius vertex G, baſis MN circulus, plano per axem ſectus ad rectos baſi angulos faciente triangulum MGN, rurſus ſecari plano per rectam PQ ad triangulum MGN recto, formante in ſuperficie ſectionem PRQ, cuius ſit diameter QP. Dico PRQ ſectionem ellipſim eſſe datæ BAC ellipſi eandem, & in exhibito GMN cono ſingularem.

Iungatur enim HM: & in quo FM ſecat HI, ſit punctum L: iungaturque GL. Occurrit igitur QP ſectionis PRQ diameter productæ MN, quoniam æquidiſtat GF: & propter exteriorem FGN, hoc eſt GPQ, angulum æqualem interiori oppoſito HMN, erit

G P Q angulus maior angulo G M N: quare recta Q P baſi M N neque æquidiſtat, neque ſubcontrariè eſt poſita: ſectio igitur Q R P, ex definit. & ex anteced. erit ellipſis. Eſtque vtrumque per P R Q & baſis coni planum ad idem per axem triangulum G M N rectum: ideoq; &



communis amborum ſectio, cui æquidiſtantes erunt quæ à ſectione ad QP diametrum ordinatim applicabuntur, ad vtramque Q P, M N erit perpendicularis: diameter igitur Q P ellipſeos Q R P etiam axis erit. Quoniam autem propter æquidiſtantes GO, PQ, itemque GQ, O P, recta Q P rectæ G O, hoc eſt axi X, eſt æqualis: & vt X ad Z, ita eſt G F ad F H, hoc eſt ita G F quadratum ad G F H, vel M F N, rectangulum: & ita, ex 14 primi huius, QP tranſuerſus axis ad contiguam rectam parametrum; erit & ellipſeos Q R P recta parameter ipſi Q P tranſuerſo axi contigua, æqualis rectæ parametro Z. Quare, per 9 huius, ellipſis Q R P ellipſi BAC eadem erit. Rurſus, quoniam H L I diameter eſt circuli, & ad eam perpendicularis M L N, erit M L æqualis L N: eſtque M L N circuli, qui baſis eſt coni G M N, diameter: quare & L eiuſdem circuli centrum erit: & ducta G L eiuſdem coni erit axis. Eſtque G L ad rectam MLN inclinata: conus igitur GMN, ex definit. erit ſcalenus. Sed &, propter rectam MLN ad diametrum H I perpendicularem, erit arcus M I arcui I N æqualis, ideoq; & angulus MGI angulo IGN etiam æqualis: recta igitur G I angulum MGN bifariam diuidit. Et ei perpendicularis eſt QP ellipſeos Q R P diameter: igitur, ex 26 huius, ellipſis Q R P, hoc eſt BAC, exhibiti GMN coni ſingularis erit ſectio. Exhibitus eſt igitur G M N conus cuius ellipſis B A C ſectio eſt ſingularis. Quod facere oportebat.

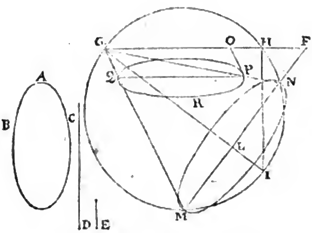
PROBL. V. PROP. XXXV.

Data ellipſi; conum exhibere cuius ſit è binis ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus vna.

Sit data ellipſis quæcunque BAC, cuius ſit tranſuerſus axis maior D, & contigua recta parameter E.

Digitized by Google

Expoſita recta quæpiam G F ſecetur in H, vt ſit G F ad F H veluti D ad E: erectaque perpendiculari H I eiuſmodi, vt ſit maior HI ad H G ratio, quàm F H ad H I, iungatur G I, ad quam perpendicularis ducatur F L, deſcriptę per tria G, H, I puncta circuli circunferentiæ occurrens in M & N, hoc enim fieri poſſe conſtat ex 32 huius: iunganturque G M, G N quæ inuicem erunt æquales: & ſumpta in



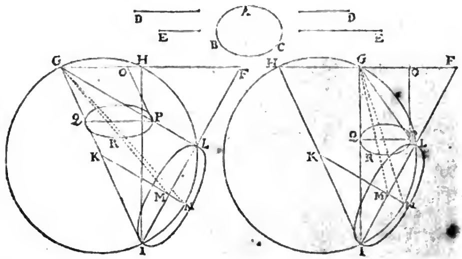
G F recta G O æquali D, ducatur ad G N recta OP æquidiſtans G M: atque etiam P Q æquidiſtans G F: & intelligatur G M N conus rectus, cuius vertex G, baſis M N circulus, iam per axem ſectus plano faciente triangulum M G N, rurſus ſecari plano per rectam P Q ad triangulum M G N recto formante in ſuperficie ſectionem P R Q, cuius ſit diameter recta Q P. Dico ſectionem PRQ ellipſim eſſe propoſitæ B A C ellipſi eandem, & exhibiti G M N coni vnam è binis iiſdem & ſubcontrarijs ſectionibus.

Quoniam enim angulus G P Q, ſiue H G N, hoc eſt, ductâ HM, angulus HMN, minor eſt angulo G M N: æquidiſtatque recta QP rectæ G F, ideoque & rectæ M N occurrit; non æquidiſtat neque ſubcontrarié eſt poſita recta P Q rectæ M N. Quare, ex definit. & ex 33 huius, ſectio P R Q ellipſis erit. Et quoniam vtrumq; per P R Q & baſis coni planum ad idem per axem triangulum M G N rectum eſt, erit recta P Q ellipſeos P R Q diameter etiam tranſuerſus axis. Sed vt D ad E, ita eſt G F ad F H, hoc eſt ita G F quadratum ad G F H, ſiue M F N, rectangulum, & ita Q P tranſuerſus axis ad contiguam rectam parametrum: eſtque Q P æqualis G O, hoc eſt tranſuerſo axi D: igitur & ellipſeos P R Q recta parameter ellipſeos B A C rectæ parametro etiam æqualis erit. Quare &, per 9 huius, altera alteri ellipſis eadem erit: ideoque & ellipſis P R Q, hoc eſt B A C, exhibiti G M N coni recti, per 19 huius, vna erit è binis iiſdem & ſubcontrarijs ſectionibus.

Si quidem conus poſtuletur ſcalenus, cuius propoſita B A C ellipſis vna ſit è binis iiſdem & ſubcontrarijs ſectionibus: datuſque ſit axis tranſuerſus ſiue maior ſiue minor D, eiuſque contigua recta parameter E; expoſita quæcunque recta G F ſecetur aut producatur in H, vt ſit F G ad F H, veluti D ad E: erectaque, altero caſu, perpendiculari H I, vel, altero, perpendiculari G I, eiuſmodi vt ſit maior vtro-

Digitized by Google

bique perpendicularis HI, vel GI, ad HG ratio, quàm FH vel FG, ad ipſam HI vel GI perpendicularem: &, propter angu-

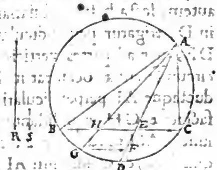


lum GIF, vel HIF, ex 32 huius, acutum, deſcriptam per tria G, H, I puncta circuli circumferentiam ſecet in L recta FI: iungaturque GL: ſecta autem IL bifariam in M, ſecetur etiam anguli recti ſubſtenſa HI, vel GI, bifariam in K, vt ſit K circuli GHI centrum: junctâque KM & productâ ad circumferentiam in N, iungantur GM, GN. Angulus igitur IGN æqualis erit angulo NGL rectaque GN angulum IGL bifariam ſecabit: & quoniam ad baſim IL non eſt perpendicularis GN, erit triangulum IGL ſcalenum. Sumpta autem in GF recta GO æquali D, ductaque, vt prius, OP æquidiſtante GI, & PQ æquidiſtante GO, quoniam angulus FGL æqualis eſt angulo HIF, erit angulus GIL maior vel minor angulo FGL, hoc eſt GPQ. Recta igitur QP baſi IL non erit ſubcontrariè poſita. Sed neq; erit æquidiſtans, ſiquidem æquidiſtat rectæ GF occurrenti IL: neq; etiam ad rectam GN angulum IGL bifariam ſecantem eſt perpendicularis, quoniam neq; ipſi GN perpendicularis eſt GF: ſi intelligatur itaq; GIL conus ſcalenus, cuius vertex G, baſis IL circulus, per axem ſectus ad rectos baſi angulos plano faciente triangulum IGL, rurſus ſecari per rectam PQ plano ad triangulum IGL recto formante in ſuperficie ſectionem PRQ, cuius ſit diameter PQ; erit vtique PRQ ſectio ellipſis, eiuſdemque axis tranſuerſus recta QP. Oſtendetur igitur, vt prius, ellipſim PRQ ellipſi BAC eandem eſſe &, ex 19 huius, vnam è binis ijſdem & ſubcontrarijs in exhibiti GIL coni ſcaleni ſuperficie ſectionibus. Quare omnino problemati ſic ſatisfactum erit. Quod facere oportebat.

LEMMA X.

Lemma X. Probl. VI. Prop. XXXVI.

A vertice trianguli cuiuſlibet ad eiuſdem baſim ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub ſegmentis baſis ab ipſa factis contentum datam teneat rationem.



Oportet autem vt data ratio non minor ſit, quàm ratio quadrati rectę à vertice ad baſim ductæ ipſam pro ratione crurum diuidentis ad rectangulum ſub baſis ſegmentis.

Sit igitur triangulum BAC, cuius vertex A, baſis BC; & data ratio R ad S.

Triangulo BAC circumſcribatur circulus: & ducta AD angulum BAC bifariam diuidens, baſim BC ſecet in E, & circumferentiæ occurrat in D: vtque R ad S, ita fiat AE ad EF: ductaque FG parallela BC, & circumferentiæ occurrente in G, ducatur AG ſecans BC baſim in H. Dico AH eſſe rectam quæſitam: & quadratum AH ſe habere ad rectangulum BHC, vt R ad S.

Quoniam enim vt AE ad EF, hoc eſt vt R ad S, ita eſt AH ad HG, hoc eſt ita AH quadratum ad AHG, ſiue BHC rectangulum; erit vt R ad S, ita AH quadratum ad BHC rectangulum. Quare ducta eſt AH problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

Lemma XI Probl. VII. Prop. XXXVII.

A dati cuiuſlibet trianguli vertice ab baſim productam ducere rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub baſe producta, & eius exteriori parte comprehenſum datam teneat rationem.

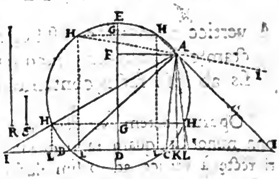
Oportet autem vt, ſi triangulum iſoſceles eſt, data ratio non ſit æqualitatis, neque minoris inæqualitatis; ſin autem ſcalenum eſt, & data ratio ſit minoris inæqualitatis; oportet vt, cùm triangulo circumſcribetur circulus, & à vertice trianguli ad baſim perpendicularis deducetur, atq; à bifariam ſectæ baſis puncto perpendicularis ad circumferentiam educetur ad eaſdem verticis partes, data ratio non minor ſit, quàm ratio perpendicularis à vertice deductæ ad perpendicularem à biſectionis puncto eductam.

Sit igitur triangulum quodcunque BAC, & data ratio R ad S. Oporteatque ab A vertice ad BC baſim ducere lineam rectam cuius quadratum ad rectangulum ſub eadem baſe producta & eius exteriori

Digitized by Google

parte comprehenſum ſe habeat vt R ad S.

Triangulo BAC circumſcribatur circulus. Si quidem R eſt æqualis S, ducta AI circumferentiam contingens in A problemati ſatisfaciet: ſin autem, ſecta baſi BC bifariam in D, erigatur perpendicularis DE, quæ ad partes verticis A circumferentiæ occurrat in E:



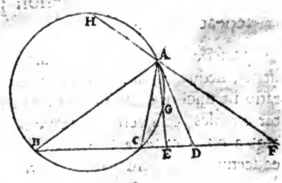
ductaque AF perpendiculari ad DE, vt R ad S, ita fiat DF ad DG factaque GH æquidiſtante BC, & circumferentiæ occurrente in H, iuncta AH producatur ad BC productam in I. Dico AI eſſe rectam quæſitam, & quadratum AI ad rectangulum BIC ſe habere vt R ad S.

Cadant enim ad baſim BC perpendiculares AK, HL. Igitur vt AK ad HL, hoc eſt vt DF ad DG, ſiue vt R ad S, ita erit AI ad IH, hoc eſt ita AI quadratum ad AIH, ſiue BIC rectangulum. Quare ducta eſt AI problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

LEMMA XII. PROP. XXXVIII.

Si à vertice cuiuſcunque trianguli ad baſim productam recta agatur quę poſſit rectangulum ſub conterminis baſis partibus contentum; fiet exterior verticalis angulus interiori oppoſito ad baſim ęqualis. At vero ſi rectę à vertice ductę quadratum prædicto rectangulo ſit maius; erit verticalis exterior angulus oppoſito ad baſim interno angulo minor: & recta cuius quadratum minus erit maiorem ſemper externum verticalem conſtituet angulum.

Sit triangulum quodcunque ABC, cuius baſis BC producta ſit ad partes C in D, ita vt ductæ AD quadratum rectangulo BDC ſit ęquale. Dico angulum CAD æquale eſſe angulo ABC.



Triangulo ABC circumſcribatur circulus. Igitur recta DA circumferentiam continget in A: ideoque externus CAD angulus interno oppoſito in alterna circuli portione angulo ABC erit æqualis.

Sit autem ductæ AF quadratum rectangulo BFC minus. Dico angulum CAF maiorem eſſe angulo ABC.

Digitized by Google

Quoniam enim quadratum A F minus eſt rectangulo B F C, maior erit ratio B F ad F A, quàm A F ad F C: quare angulus A C F minor erit angulo B A F: igitur, propter cõmunem ad F angulum, erit reliquus C A F angulus reliquo A B F, hoc eſt A B C, angulo maior.

Similiterque ſi ductæ A E quadratum maius ſit rectangulo B E C, oſtendetur angulus C A E minor angulo A B C. Quoniam hoc caſu, cum minor ſit ratio B E ad E A quàm A E ad E C, maior erit A C E angulus angulo A B E: ideoque &, propter communem ad E, erit reliquus C A E angulus reliquo A B E, hoc eſt A B C, angulo minor. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

COROLL. I.

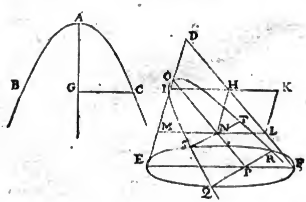
Hinc fit euidens Rectas à vertice trianguli ad baſim productam ductas quarum quadrata rectangulis ſub conterminis baſis partibus non ſunt æqualia, circumſcripti circuli circumferentiam ſecare. Vt, in expoſito diagrammate, rectæ A F, A E circumferentiam B C A ſecant hæc in G, illa in H.

COROLL. II.

Hinc etiam conſtat liquidò Rectarum intra triangulum ductarum rectis à vertice ad baſim productam ductis parallelarum eam ſolam quæ rectæ circumſcriptam circumferentiam contingenti, hoc eſt cuius quadratum rectangulo ſub conterminis baſis partibus ſit æquale, æquidiſtat, baſi trianguli ſubcontrariè eſſe poſitam: reliquas verò minimè.

PROBL. VIII. PROP. XXXIX.

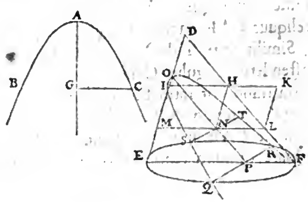
Dato cono; exhibere in eius ſuperficie parabolam datæ eandem.



Sit datus D E F conus, cuius vertex D, baſis E F circulus: dataque B A C parabola, cuius axis ſit A G. Oportet in dati D E F coni ſuperficie parabolæ B A C eandem parabolam exhibere.

A quolibet in B A C parabola puncto C ad axem ordinatim duca-

tur C G. Erit igitur angulus A G C rectus. Conus itaque D E F plano ſecetur per axem ad baſim recto faciente triangulum E D F: & in D F, producta ſi opus eſt, ſumpta D H æquali A G, ducatur I H parallela E F, & producatur ad partes H in K, vt quadrato C G æquale fiat I H K rectangulum: & per K alteri D E lateri parallela agatur K L, occurrens D F in L puncto, à quo ad D E rurſus ipſi E F parallela agatur L M, ad quam à puncto H ducatur H N æquidiſtans D E: & per N agatur N O æquidiſtans D L, occurrenſque D M in O puncto, quod erit idem cum puncto I, ſi conus D E F ſit rectus. Secetur iam rurſus idem D E F conus plano per rectam O N ad triangulum E D F recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem Q O R, cuius ſit diameter recta O N P. Erit igitur, propter æquidiſtantes O P, D F, ſectio Q O R parabola, & eius axis recta O N P. Dico itaque parabolam Q O R propoſitæ B A C parabolæ eſſe eandem.



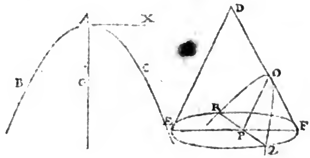
Secetur enim D E F conus plano per rectam M N L baſi æquidiſtante, eiuſque & plani per Q O R communis ſectio ſit recta S N T. Ipſaque S & T puncta ſint in coni ſuperficie. Quoniam igitur vtrumque per Q O R & M S L planum ad D E F triangulum eſt rectum; erit & communis amborum ſectio S N T ad idem D E F triangulum recta: ideoq; & ad rectas M N, O N perpendicularis: vterque igitur O N S, M N S angulus erit rectus. Et eſt punctum S in coni ſuperficie, & in plano per M L baſi coni æquidiſtante, ideoq; & in circuli circumferentia cuius ſit diameter M N L, per 2 primi huius: igitur N S quadratum rectangulo M N L, hoc eſt I H K rectangulo, ſiue C G quadrato, erit æquale: ideoque & recta S N rectæ C G erit æqualis. Sed & in parallelogrammo N D recta N O rectæ H D, hoc eſt A G, etiam erit æqualis: eſtque vterque A G C, O N S angulus rectus: igitur, per 5 huius, parabola Q O R in propoſiti D E F coni ſuperficie exhibita datæ B A C parabolæ eadem erit. Quare & problemati ſic erit ſatisfactum.

ALITER, ET BREVIVS.

Sit datus idem D E F conus, & propoſita eadem B A C parabola, cuius axis ſit A G, & recta parameter A X.

Secto D E F cono plano per axem ad baſim recto faciente triangulum

lum EDF, fiat vt EF quadratum ad EDF rectangulum, ita AX recta ad rectam DO: ductaque à puncto O ad EF ipſi DE parallela OP, ſecetur rurſus DEF conus plano per rectam OP ad triangulum EDF recto, quod ſectionem in ſuperficie faciat curuam lineam QOR, & in baſe coni rectam QPR. Erit vtique, propter æquidiſtantes OP, DE, ſectio QOR parabola, eiuſque diameter OP. Dico itaque parabolam QOR parabolæ BAC eſſe eandem.

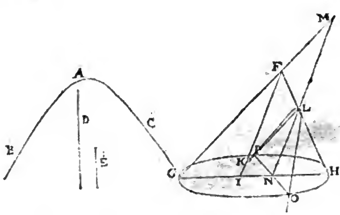


Quoniam enim vtrumque per QOR & baſis coni planum ad triangulum EDF rectum eſt; erit amborum communis ſectio recta QPR ad EF baſis coni diametrum perpendicularis, & bifariam ſecta in P: ideoque & QP ad OP diametrum ordinatim erit applicata: quare & parabolæ QOR axis erit OP. Quoniam autem vt EF quadratum ad EDF rectangulum, ita eſt AX ad DO, & conuerſim; erit ipſi AX æqualis, ex 12 primi huius, recta parabolæ QOR parameter: ideoque &c., per 8 huius, parabolæ BAC eadem erit QOR parabola in expoſiti DEF coni ſupetficie exhibita. Quare & ſic problemati ſatisfactum erit.

PROBL. IX. PROP. XL.

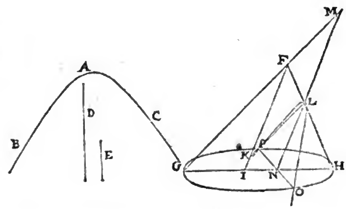
Dato cono; exhibere in eius ſuperficie hyperbolam datæ eandem.

Sit datus FGH conus, cuius vertex F, baſis GH circulus: dataque BAC hyperbola, cuius ſit axis tráſuerſus D, & recta parameter E. Quæraturque in coni FHG ſuperficie hyperbola datæ BAC hyperbolæ eadem.



Oportet autem vt, cum FGH conus plano ſectus per axem fuerit ad rectos baſi angulos, & à vertice trianguli per axem ad baſim

recta ducta fuerit angulum verticis biſariam diuidens, non minor ſit rectanguli ſub baſis partibus ad quadratum biſecantis angulum ratio, quàm rectæ parametri E ad tranſuerſum axem D.



Secetur igitur FHG conus plano per axem faciente triangulum GFH ad baſim coni rectum; & à vertice trianguli F ad baſim GH ducatur, per 36 huius, recta FI cuius quadratum ad rectangulum GIH ſe habeat vt D ad E: & in FI, producta ſi opus eſt, ſumatur FK æqualis D: ducaturque KL parallela FG quæ occurrat FH in L: & per L ducatur MLN æquidiſtans FI: perque ipſam MLN ſecetur rurſus FGH conus plano ad triangulum GFH recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem OLP, & in baſe rectam ONP. Erit vtique OLP ſectio hyperbola, eiuſque tranſuerſa diameter LM. Dico itaque hyperbolam OLP hyperbolæ BAC eſſe eandem.

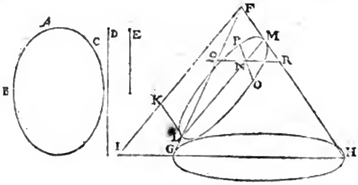
Quoniam enim vtrumque per OLP & baſis coni planum ad triangulum GFH eſt rectum, erit & amborum communis ſectio recta ONP ad idem triangulum recta: ideoque & ad rectas LN, GN perpendicularis, & biſariam ſecta in N: quare & ON ad LN diametrum ordinatim erit applicata, eritque LN diameter etiam axis. Sed vt FI quadratum ad GIH rectangulum, ita eſt hyperbolæ OLP tranſuerſus axis ML ad rectam parametrum: atque etiam ita tranſuerſus hyperbolæ BAC axis D ad rectam parametrum E: & in parallelogrammo KM recta ML rectæ PK, hoc eſt ipſi tranſuerſo axi D, eſt æqualis: quare & rectæ ſectionum parametri etiam inuicem æquales erunt. Hyperbola igitur OLP in propoſiti FGH coni ſuperficie exhibita, ex 9 huius, datæ BAC hyperbolæ eadem erit. Quare & problemati erit ſatisfactum.

PROBL. X. PROP. XLI.

Dato cono; exhibere in eius ſuperficie datæ ellipſi eandem ellipſim.

Sit datus FGH conus, cuius vertex F, baſis GH circulus: & data BAC ellipſis, cuius axis tranſuerſus ſit D, & contigua recta parame-

ter E. Quæraturque in propoſiti F G H coni ſuperficie ellipſis datæ B A C ellipſi eadem.



Oportet autem, ſi datus tranſuerſus axis D ſit minor quam E, vt datus FGH conus non ſit rectus, ſed ſcalenus: vtq; eius per axem ſecti ad rectos baſi angulos triangulum ſit eiuſmodi quale in 37 huius præſcriptum eſt. Attamen ſi hoc caſu ſumpta inter E & D media proportionali X, vt E ad D, ita fiat X ad Z; erit, ex 34 primi huius, X eiuſdem B A C ellipſeos maior axis tranſuerſus, & ipſi contigua minor recta parameter Z: nec vlla tunc problema determinatione indigebit.

Sit itaque datus axis tranſuerſus maior D, & contigua recta parameter E.

Secetur FGH conus plano per axem faciente triangulum GFH ad baſim coni rectum: & à vertice F ad baſim GH productam recta ducatur FI, per 37 huius, quæ faciat rationem quadrati FI ad rectangulum GIH eandem quæ D ad E: & in FI, producta ſi opus eſt, ſumpta FK æquali D, ducatur ad FG, vbi opus productam, recta KL parallela FH: & ab L ad FH ipſi FK parallela agatur LM: rurſuſque ſecetur FGH conus plano per LM ad triangulum GFH recto, quod faciat in ſuperficie ſectionem MOLP. Erit vtique, ex coroll. 2 ad 38, & 1 ad 33 huius, facta in ſuperficie coni ſectio MOLP ellipſis, eiuſque tranſuerſa diameter ML. Dico igitur ellipſim MOLP propoſitæ BAC ellipſi eſſe eandem.

Sumpto enim in ML quolibet puncto N, ducatur per N recta QNR æquidiſtans GH: & per QNR planum agatur baſi coni æquidiſtans, cuius & plani per MOLP communis ſectio ſit recta ONP. Igitur quoniam vtrumque per QOR & MOLP planum ad triangulum GFH eſt rectum; erit & communis amborum ſectio recta ONP ad idem triãgulum recta: ideoq; & recta OP ad vtramque MN, QN perpendicularis erit, & bifariam ſecta in N, atq; ad MNL diametrum ordinatim erit applicata: eritque MNL diameter etiam axis tranſuerſus. Sed vt D ad E, ita eſt FI quadratum ad rectangulum GIH, atque etiam ita ML tranſuerſus axis ad contiguam rectam parametrum: eſtq; in parallelogrammo KM recta ML rectæ FK, hoc eſt tranſuerſo axi D, æqualis: igitur & ellipſeos MOLP contigua tranſuerſo ML axi recta parameter ellipſeos BAC rectę parametro E erit æqualis: &, per 9 huius, ellipſi BAC eadem erit

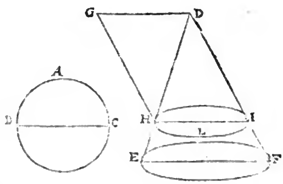
exhibita in propoſiti FGH coni ſuperficie ellipſis MOLP. Quare & problemati erit ſatisfactum.

Sed & pro circuli circumferentia problema ſequens addere viſum eſt non inutile.

PROBL. XI. PROP. XLII.

Dato cono; exhibere in eius ſuperficie datę circuli circumferentiæ eandem circumferentiam.

Sit datus conus DEF, cuius vertex D, baſis EF circulus: & data circuli circumferentia BAC, cuius diameter ſit BC.



Secetur DEF conus plano per axem faciente triangulum EDF. Erit igitur EF baſis coni diameter. Si igitur EF æqualis eſt BC; erit baſis coni circumferentia datæ BAC circuli circumferentiæ eadem. Sin autem; agatur per D verticem recta DG æquidiſtans EF, & æqualis BC: & à puncto G ad DE, vbi opus productam, actâ GH parallelâ DF, agatur per H ipſi EF æquidiſtans HI: ſeceturque rurſus DEF conus per rectam HI plano baſi æquidiſtante. Erit igitur facta in ſuperficie coni ſectio circuli circumferentia. Sit illa HLI, eiuſque diameter HI. Dico circumferentiam HLI circumferentiæ BAC eſſe eandem.

Hoc enim propter parallelogrammum GI, ideoque & HI diametrum ęqualem DG, hoc eſt BC diametro, manifeſtò conſtat.

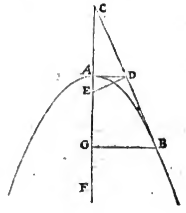
THEOR. XXII. PROP. XLIII.

Si recta linea parabolem altero contingens termino, altero cum axe conueniens, bifariam ſecetur; quæ per ſectionis punctum ipſi perpendicularis ducetur, paraboles vmbilico occurret.

Sit parabola AB, cuius axis AF, ipſamque contingat in B recta BC axi occurrens in C: & ſectâ BC bifariam in D, erecta perpendicularis DE, axi AF occurrat in E puncto. Dico punctum E parabolæ AB eſſe vmbilicum.

Ordinatim

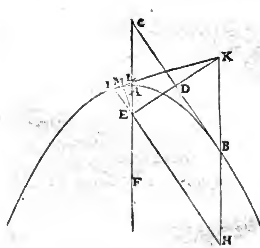
Digitized by Google



Ordinatim applicetur B G: iungaturque A D. Igitur, propter æquales C D, D B, itemque C A, A G, ex 18 primi huius, erit A D æquidiſtans B G, anguluſque C A D erit rectus. Eſtque rectus etiam C D E angulus: igitur vt C A ad A D, ita erit A D ad A E. Sed vt A G ad G B, ita eſt G B ad ſectionis rectam parametrum: eſtque A D dimidiæ G B æqualis: igitur vt C A ad A D, hoc eſt vt A G ad dimidiam G B, ita erit A D ad A E, & ita A D ad quadrantem rectæ parametri. Quadranti igitur rectæ parametri erit æqualis A E: ideoque & punctum E in axe ſectionis ſiue parabolę A B erit, ex definit. vmbilicus. Quod erat demonſtrandum.

THEOR XXIII. PROP. XLIIII.

Si parabolem recta contingat linea, quæ per ſectionis vmbilicum eidem ducetur æquidiſtans, abſcindet à diametro per contactum ducta rectam intra ſectionem æqualem quadranti contiguę parametri.

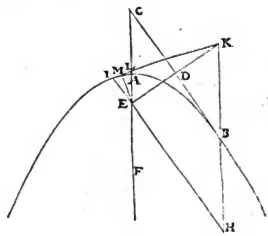


Sit parabola A B, cuius axis A F, vmbilicus E: ipſamque contingat in B recta B C, cui per E æquidiſtans ducatur E H, occurrens diametro B H in H. Dico B H æqualem eſſe quadranti contiguæ parametri.

Contingens enim B C axi occurrat in C: ſectâque B C bifariam in D, iungatur E D, & producatur donec diametro H B productæ occurrat in K: productâque H E ad ſectionem in I, iungatur K I axem ſecans in L. Triangulum igitur C D E triangulo B D K ſimile erit & æquale. Quare erit B K æqualis C E, hoc eſt B H. Contingenti autem B C æquidiſtat H I, ideoque & ad B H diametrum ordinatim eſt applicata: ducta igitur I K ſectionem contingit in I. Sed & cum axe conuenit in L: quare, ſectâ I L bifariam in M, quæ à puncto M eidem I L perpendicularis educetur oc-

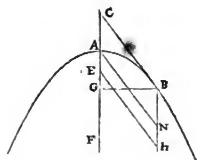
Digitized by Google

curret vmbilico E, ex antecedente, eritque EI æqualis EL: ideoque & IH etiam æqualis erit HK, hoc eſt dupla HB. Sed quadrato HI æquale eſt rectangulum ſub HB & contigua parametro: eidemque HI quadrato æquale etiam eſt quadruplum HB quadratum, hoc eſt rectangulum ſub BH rectâ & eiuſdem quadruplâ: æqualis igitur erit quadrupla BH contingua parametro. Quare & eiuſdem parametri quadranti erit recta BH æqualis. Quod erat demonſtrandum.



ALITER.

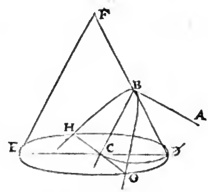
Cotingenti BC æquidiſtans ducatur AN: & ordinatim applicetur BG. Erunt AN, BC, itemque BN, AC inuicem æquales. Sed quadratum BC æquale eſt quadrato BG, hoc eſt rectangulo ex GA in quadruplam AE, & quadrato CG, hoc eſt quadruplo ex CA quadrato: igitur & quadratum NA rectangulo ex GA, hoc eſt BN, in quadruplam AE, & quadruplo CA, hoc eſt BN, quadrato erit æquale. Sed idem NA quadratum æquale eſt rectangulo ſub BN & contigua parametro: igitur rectangulo ſub BN & quadrupla AE, vna cum quadruplo CA, ſiue BN, quadrato, hoc eſt vnico ex BN in quadruplam CE, vel EH, rectangulo æquale erit rectangulum ſub BN & contigua parametro. Quare recta BH quadranti contiguæ parametri erit æqualis. Quod erat demonſtrandum.



Digitized by Google

PROBL. XII. PROP. XLV.

Datis, poſitione, duabus rectis lineis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera ſit terminata; conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quę ſit parabole, cuius datarum altera ſit diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, cuiuſque ordinatę ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.

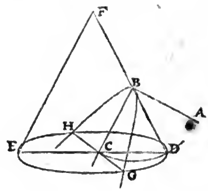


Sint datæ poſitione binæ A B, B C lineæ rectæ, in dato primùm A B C recto angulo inuicem in B coniunctæ: ſitque A B etiam magnitudine data. Oportet conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quæ ſit parabole, cuius diameter ſit BC, vertex B, & contigua parameter BA, cuiuſque ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicentur; hoc eſt vt ipſa BC ſit quæſitæ ſectionis axis, & AB recta parameter.

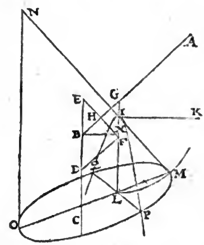
Si quidem conus poſtuletur rectus; ſumpto in BC quolibet puncto C, centro B & interuallo B C deſcribatur circuli circumferentiæ portio C D, in qua ſumpto quolibet alio puncto D, iungatur DC, & producatur in E, vt rectangulo ABC æquale ſit rectangulum D C E: iunctaque D B producatur in F, vt ducta E F ſit æquidiſtans B C. Erit igitur DF æqualis FE; quoniam & B D æqualis eſt B C. Intelligatur itaque FED conus rectus, cuius vertex F, baſis ED circulus, plano iam per axem ſectus faciente triangulum FED, qui rurſus ſecetur per rectam BC cruri E F æquidiſtantem, plano ad idem E F D triangulum recto, formante in ſuperficie ſectionem G B H. Erit vtique G B H ſectio parabola, eiuſque diameter eadem recta BC. Dico itaque parabolæ G B H in expoſiti F E D coni ſuperficie exhibitæ rectam parametrum eſſe AB, verticem B, & B C axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, ſcilicet recto, applicabuntur.

Quoniam enim vtrumque per G B H & baſis coni planum ad idem E F D triangulum eſt rectum, erit amborum communis ſectio recta G C H ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque E D, B C perpendicularis, & bifariam ſecta in C: quare & ad B C diametrum ordinatim erit applicata C G: &, propter angulum B C G rectum, erit B C diameter etiam ſectionis axis. Sed &, propter angulum D C G rectum, rectangulo D C E, hoc eſt ABC,

æquale eſt C G quadratum: parabolæ igitur G B H recta parameter erit B A. Quare exhibitus eſt FED conus rectus, & in eius ſuperficie parabola G B H problemati ſatisfaciens.



Si poſtuletur conus ſcalenus; ſumpto vbilibet puncto D extra rectam B C & circumferentiam centro B interuallo B C deſcriptam, iungetur DC, & producetur in E, vt rectangulo ABC æquale fiat DCE rectangulum: cæteraq; peragentur vt iam dictum eſt. Erit ſiquidem tunc, propter inæquales B C, BD, ideoque & FE, FD, hibitus FED conus ſcalenus.



Non ſit autem iam datus A B C angulus rectus, ſed vel acutus vel obtuſus. Sumantur in B C, vbi opus producta, rectæ B D, B E quadranti ex BA ſigillatim æquales: ductæque D F æquidiſtanti A B perpendicularis ducatur E F, quæ rectam A B, ſaltem productam, ſecet in H: tum per F agatur F G æquidiſtans B C, occurrenſque rectæ B A in G: ductaq; B X perpendiculari ad FG, ſecetur G X bifariam in I: eductaque ad G X perpendiculari I K eiuſmodi vt quadrato B X æquale ſit rectangulum X I K; datis binis rectis lineis I K, I F in dato K I F angulo recto inuicem in I iunctis, quarum I K ſit terminata, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus, & in eius ſuperficie parabola, cuius ſit vertex I, recta parameter I K, & I F axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in dato K I F angulo recto applicentur: ſitque eiuſmodi conus N O M, cuius vertex N, baſis O M circulus, & in eius ſuperficie parabola P I Q, cuius diameter, ſiue axis, ſit I F. Dico parabolam P I Q in ſuperficie N O M coni exhibitam problemati ſatisfacere, & eius etiam verticem eſſe punctum B, parametrum BA, & BC contiguam diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato A B C angulo, ſcilicet obliquo, applicabuntur.

Sit enim N O M coni per axem ſecti triangulum O N M ad baſim coni rectum: planique per P I Q ad triangulum O N M recti & baſis coni communis ſectio ſit recta P L Q. Oſtendetur primò, vt prius, recta P L Q ad vtramque O L & I L perpendicularis, & bifariam ſecta in L, ideoq; & ad I L diametrum, quæ ideo axis erit, ordinatim applicata. Quoniam autem B X perpendicularis eſt ad

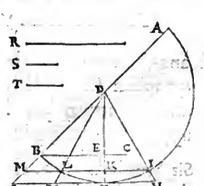
I F,

Digitized by Google

IF, & eius quadrato æquale eſt rectangulum XIK, erit punctum B in parabola cuius ſit vertex I, recta parameter IK, & axis IF: ideoque & recta BX à ſectione ad axem ordinatim erit applicata. Eſt autem IG æqualis IX: recta igitur BG, hoc eſt BA, ſectionem contingit in B. Propter æquidiſtantes autem BD, GF, itemq; BG, DF, & rectam GF rectæ BD; hoc eſt BE, æqualem, erit & BH æqualis HG. Ideoque & recta BG bifariam erit ſecta in H. Eiq; perpendicularis eſt HF: punctum igitur F, ex 43 huius, ſectionis eiuſdem erit vmbilicus. Eſt autem BD axi GF æquidiſtans: diameter igitur erit BD. Et propter FD æquidiſtantem BG, recta BD, ex anteced. æqualis erit quadranti contiguæ parametri. Eſtque AB ipſius BD quadrupla: eiuſdem igitur per puncta B, I deſcriptę ſectionis parameter erit AB ipſi BD diametro contigua. Quoniam autem rectangulo KIL æquale eſt rectangulum MLO, hoc eſt PL quadratum, hoc enim ex priori conſtructione conſtat, erit punctum P in eadem parabola cuius ſit vertex I, & recta parameter IK, atq; axis IF. Quare parabola PIQ in coni NOM ſuperficie exhibita eidem per puncta B, I circa axem IL deſcriptæ parabolæ eadem erit: ipſiuſque etiam vertex erit B, & diameter BC, atq; contigua parameter BA, cui æquidiſtantes erunt quæcunque à ſectione ad BC diametrum ordinatim applicabuntur, ideoque & in ęquali dato ABC angulo, ſcilicet obliquo. Quare & ſic problemati erit ſatisfactum.

LEMMA XIII. PROBL. XIII. PROP. XLVI.

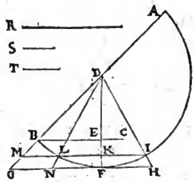
Datis poſitione duabus rectis lineis in dato angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera ſit terminata; in eadem producta punctum inuenire, à quo ad circumferentiam ſemicirculi ſuper ipſa deſcripti recta ducatur linea alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum ſub productę partibus puncto inuento & eadem circumferentia interceptis datam teneat rationem.



Sint poſitione datæ AB, BC rectæ lineæ in dato ABC angulo non recto inuicem in B iunctæ: ſit autem AB terminata, & ſuper ipſa deſcriptus AFB ſemicirculus. Oporteatque in AB producta punctum inuenire, à quo recta linea ducatur ipſi BC parallela, & circumferentia ſemicirculi terminata, cuius quadratum ad rectangulum ſub productę AB partibus puncto

inuento & eadem circumferentia interceptis datam R ad S teneat rationem.

Sit primùm R æqualis S. Sectâ igitur AB bifariam in D, ducatur ad BC, productam vbi opus, perpendicularis DE, quæ producta circumferentię occurrat in F: ducaturq; FG æquidiſtans BC, quæ productæ AB occurrat in G. Dico punctum G problemati ſatisfacere. Hoc autem patet, quoniam quadrato FG æquale erit rectangulum AGB.



Sit iam R maior quàm S: ſitq; T æqualis dimidiæ inter R & S differentiæ. Producatur igitur GF ad partes F in H, vt ſit GH ad HF, veluti R ad T: iunctaque DH ſecante circumferentiam in I, ducatur per I ad AB rectam ipſi BC parallela IM. Dico itaque punctum M problemati ſatisfacere, & ſe habere quadratum MI ad rectangulum AMB, veluti R ad S.

Sit enim punctum K in quo perpendicularis DF ſecat rectam MI: & punctum L in quo eadem MI circumferentiam AIB ſecat: ducaturque DL. Quoniam igitur DF eſt ad vtramque BC & MI perpendicularis, erit KL æqualis KI. Cum autem ſit vt GH ad HF, hoc eſt vt R ad T, ita MI ad IK: erit vt R ad duplam T, ſiue ad differentiam inter R & S, ita MI ad IL. Quare vt tota R ad reliquam S, ita erit MI ad ML, hoc eſt ita MI quadratum ad IML ſiue AMB rectangulum.

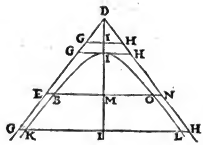
At vero ſi R minor ſit quàm S; ſumptâ T æquali dimidiæ inter vtramque differentiæ, ducta FG ſecabitur in N, ita vt ſit GN ad NF, veluti R ad T: nam ducta DN ſecante circumferentiam in L, & per L actâ ipſi BC parallelâ MLI, erit ML ad MI, hoc eſt ML quadratum ad IML ſiue AMB rectangulum, veluti R ad S. Quare vtroque caſu inuentum erit M punctum problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

THEOR. XXIV. PROP. XLVII.

Si angulum ab hyperboles aſymptotis contentum recta quæpiam ſubtendens linea bifariam ſecetur; ordinatim ad diametrum per bifariæ ſectionis punctum ductam applicatis erit ęquidiſtans.

Sit hyperbola BIO, eiuſque aſymptoti DE, DN, ideoque & centrum D: angulumque EDN ſubtendat recta quæpiam linea GH, quæ bifariam ſecetur in I: ducaturque diameter DI, & producatur

vbi opus. Dico rectam GH ordinatim ad DI diametrum applicatis eſſe æquidiſtantem.



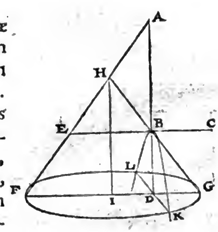
Si quidem enim GH hyperbolam BIO contingit in I, iam conſtat propoſitum, ex 17 primi huius.

Sin autem GH hyperbolam BIO ſecat in duobus K, L punctis; quoniam LH æqualis erit GK, ex 39 primi huius, erit & reliqua IL reliquę KI æqualis: ideoque & ipſa KL, hoc eſt GH, ad DI diametrum ordinatim erit applicata.

Non ſecet iam, neque contingat recta GH hyperbolam BIO. A ſumpto quolibet in ſectione puncto B ducatur ipſi GH æquidiſtans BO quæ ſectioni occurrat in O, (niſi ipſam contingat in B, quo caſu etiam vtraq; GH, BO ordinatim applicatis erit æquidiſtans) & aſymptotis DE, DN occurrat in E, & N, & diametro DI in M. Erit igitur MN æqualis EM. Sed & ON, ex eadem 39 primi huius, æqualis erit EB: quare & reliqua MO reliquę BM erit æqualis: ideoque & vtraque BM, OM, à ſectione ad DM diametrum erit ordinatim applicata. Et eiſdem ęquidiſtat GH: conſtat igitur propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XIIII. PROP. XLVIII.

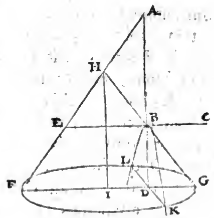
Datis poſitione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera ſit vltra connexionem producta; conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quæ ſit hyperbole, cuius datæ primùm lineę ſint altera tranſuerſa diameter, altera terminata parameter, & vertex connexionis punctum, atque producta diameter ad quam ordinatę in eodem dato angulo applicentur.



Sint poſitione & magnitudine datæ binæ AB, BC rectæ lineæ inuicem in dato ABC angulo coniunctæ, quarum AB ſit producta ad partes B in D. Oportet conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quæ ſit hyperbole, cuius tranſuerſa diameter ſit AB, contigua parameter BC, vertexque B, & BD diameter ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo applicentur. Sitque datus primùm ABC angulus rectus.

Prima methodus pro ſingulari ſectione in cono recto.

Producatur CB in E, vt ſit BE media inter AB, BC proportionalis: iungaturq; AE, & producatur in F, vt ducta DF ſit ipſi BC æquidiſtans: anguloq; FAD æqualis fiat DBG angulus: productaq; FD in G, producatur & GB ad rectam AF in H. Propter æquales igitur ad A & B angulos, & vtrumque ad D rectum, erit angulus BGD angulo AFG æqualis: quare & recta HG rectæ HF æqualis erit. Intelligatur itaque HFG conus rectus, cuius vertex H, baſis FG circulus, plano iam per axem ſectus faciente triangulum FHG, rurſus per rectam ABD



cruri HF vltra verticem H occurrentem ſecari plano ad triangulum FHG recto, formante in ſuperficie ſectionem KBL. Erit vtique KBL ſectio hyperbola, eiuſque vertex B, & diameter BD. Dico itaque hyperbolæ KBL tranſuerſum axem eſſe AB, & rectam parametrum BC, ideoque & verticem B, ac BD axem ſiue diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, ſcilicet recto, applicabuntur: ipſamque KBL hyperbolam expoſiti HFG coni recti ſectionem eſſe ſingularem.

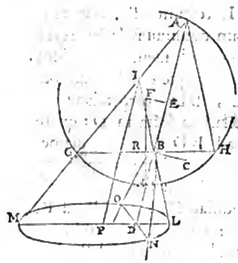
Ducatur HI æquidiſtans ABD. Quoniam igitur vtrumque per KBL & baſis coni planum ad triangulum FHG rectum eſt, erit & communis amborum ſectio, ſcilicet recta KDL, ad idem triangulum recta: ideoque & ad vtramque FG, BD perpendicularis, & bifariam ſecta in D: quare & ad diametrum BD ordinatim erit applicata. Diameter igitur BD axis erit ſectionis. Quare & BA eiuſdem ſectionis erit axis tranſuerſus. Quoniam autem FG æquidiſtat BC, erit FG ad vtramque BD, HI perpendicularis: & propter æquales FH, HG, erit & FI æqualis IG. Quare vt AB ad BE, ita erit HI ad IF, & ita HI ad IG: ideoq; vt quadratum AB ad BE quadratum, hoc eſt vt AB ad BC, ita erit HI quadratum ad FI quadratum, ſiue ad FIG rectangulum. Hyperbolæ igitur KBL etiam recta parameter erit BC. Sed & HI angulum FHG bifariam diuidit: & ei æquidiſtat BD ſectionis axis: quare, ex 18 huius, hyperbola KBL in HFG coni ſuperficie ſingularis erit ſectio. Exhibitus eſt igitur HFG conus rectus, & in eius ſuperficie hyperbola KBL ſingularis ſectio, cuius ſit tranſuerſus axis AB, recta parameter BC, vertexq; B, & BD axis, ſiue diameter ad quam ordinatę in ęquali dato ABC angulo, hoc eſt recto, applicabuntur. Quod facere oportebat.

Secunda

Digitized by Google

Secunda methodus pro ſingulari ſectione in cono ſcaleno.

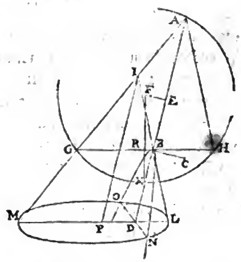
Sint datę, vt prius, binæ rectæ lineæ A B, B C in dato A B C angulo recto: ſitque AB producta in D. Oporteat conum exhibere ſcalenum, & in eius ſuperficie ſingularem hyperbolam, cuius tranſuerſus axis ſit A B, recta parameter B D, ideoque & vertex B, & B D axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in eodem dato A B C angulo recto applicabuntur.



Sumatur in B D, productâ vbi opus, recta B K æqualis BC: ſecteq; AK bifariam in E, erigatur perpendicularis quantacunq; E F: & centro F, interuallo F A deſcribatur circuli circumferentia G K A: ductæq; FK, & ad partes F vbi opus productæ, fiat per B perpendicularis G B H, quæ circumferentiæ occurrat in B & H, rectamque FK ſecet in R: ductiſq; AG, AH, ducatur per B ipſi A H parallela I B, rectæ AG occurrens in I: & per D ducatur M D L recta æquidiſtans GH, ipſiſque AG, IB, vbi opus productis, occurrens in M & L. Quoniam igitur FK per centrum tranſit, & ad eam perpendicularis eſt GH, erit arcus G K arcui K H æqualis: ideoque & angulus GAK, hoc eſt GAB, æqualis angulo B A H: & vt G B ad B H, ita erit GA ad AH. Maiorque vel minor eſt GB quàm BH, quoniam & GR eſt æqualis R H: maior igitur vel minor erit & G A quàm A H: ideoq; & GAH triangulum ad baſim G H erit ſcalenum: quare & ei ſimile MIL triangulum ad baſim M L etiam ſcalenum erit. Intelligatur itaq; IML conus ſcalenus, cuius vertex I, baſis ML circulus, plano iam per axem ſectus faciente triangulum MIL ad baſim coni rectum, qui rurſus ſecetur per rectam ABD cruri MI vltra verticem occurrentem plano ad triangulum MIL recto, formante in ſuperficie ſectionem NBO. Erit vtiq; ſectio NBO hyperbola, eiuſq; vertex B, & diameter BD. Dico igitur hyperbolam NBO in exhibiti IML coni ſcaleni ſuperficie ſingularem eſſe ſectionem: eiuſque tranſuerſum axem eſſe AB, rectam parametrum BC, verticem B, & BD axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicabuntur.

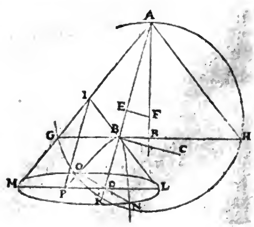
Ducatur enim IP ęquidiſtans BD. Erit igitur MIP angulus angulo PIL æqualis, quoniam & GAB æqualis eſt BAH: recta

igitur IP verticis angulum MIL bifariam diuidit. Et ei æquidiſtat BD ſectionis NBO diameter: ſectio igitur NBO in expoſiti IML coni ſcaleni ſuperficie, per 18 huius, erit ſingularis. Quoniam autem vtrumque per NBO & baſis coni planum ad triangulum MIL rectum eſt, erit amborum communis ſectio recta NDO ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque ML, BD perpendicularis, & bifariam ſecta in D: quare & ad BD ſectionis diametrum ordinatim erit applicata. Axis igitur ſectionis erit BD: ideoque & AB eiuſdem tranſuerſus erit axis. Quoniam autem & ML æquidiſtat GH, vt IP ad PM, ita erit AB ad BG: & vt IP ad PL, ita erit AB ad BH: quare vt IP quadratum ad MPL rectangulum, ita erit AB quadratum ad GBH, vel ABK rectangulum, & ita AB ad BK, vel BC. Eiuſdem igitur NBO ſectionis etiam recta parameter erit BC, ideoque & vertex B, & BD axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo, ſcilicet recto, applicabuntur. Quare & hoc etiam caſu problemati ſic ſatisfactum erit.



Tertia methodus pro binis iiſdem & ſubcontrarijs ſectionibus in cono recto.

Sint datæ rurſus binæ AB, BC rectæ lineæ angulum facientes ABC rectum: productaque ſit AB in D: & oporteat conum exhibere rectum, & in eius ſuperficie hyperbolam vnam è binis iiſdem & ſubcontrarijs ſectionibus, cuius AB tranſuerſus ſit axis, recta parameter BC, & vertex B, atq; BD diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicentur.



Sumpta, vt prius, recta BK æquali BC, ſectaque AK bifariam in E, excitetur perpendicularis quantacunque EF: centroque F & interuallo FK deſcri-

Digitized by Google

batur circuli circumferentia GKA: iunctæque AF, & vbi opus productæ, perpendicularis per B ducatur recta GBH, quæ circumferentiæ occurrat in G & H, rectamque AF ſecet in R: ductiſque AG, AH, ducatur per B ipſi AH æquidiſtans IB, rectæque AG occurrens in I: & per D ducatur MDL æquidiſtans GH, rectiſque AG, IB, vbi opus productis, occurrens in M & L. Quoniam igitur AFR per centrum tranſit, & ad eam perpendicularis eſt GRH, erit GR æqualis RH, ideoque & AG æqualis AH. Triangulum igitur GAH iſoſceles erit: quare & eidem ſimile triangulum MIL etiam erit iſoſceles. Intelligatur itaque IML conus rectus, cuius vertex I, baſis ML circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum MIL, rurſus per rectam ABD cruri MI vltra verticem occurrentem ſecari plano ad triangulum MIL recto formante in ſuperficie ſectionem NBO. Erit igitur ſectio NBO hyperbola, eiuſque diameter BD. Dico iam hyperbolam NBO coni IML ſectionem eſſe è binis iiſdem & ſubcontrarijs vnam: eiuſque tranſuerſum axem eſſe AB, rectam parametrum BC, verticem B, & BD axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo recto applicabuntur.

Ducatur enim IP æquidiſtans BD. Quoniam igitur angulus GAB minor eſt angulo BAH, vel etiam maior, ſi perpendicularis EF educta ſit ad partes BG; erit & MIP angulus etiam angulo PIL maior, vel minor: non diuidet igitur recta IP diametro BD æquidiſtans angulum verticis MIL bifariam: quare, ex 17 huius; hyperbolæ NBO in expoſiti IML coni ſuperficie exhibitæ altera in eadem ſuperficie hyperbola ſubcontrariè erit poſita. E binis igitur ijſdem & ſubcontrarijs ſectionibus erit vna NBO hyperbola. Quoniam autem vtrumque per NBO & baſis coni planum ad idem MIL triangulum eſt rectum, oſtendetur, vt ſupra, recta NDO communis eorumdem planorum ſectio perpendicularis ad BD, & bifariam ſecta in D, ideoque & ad diametrum BD ordinatim applicata: quare & ſectionis NBO axis erit BD, & recta AB eiuſdem erit axis tranſuerſus. Sed vt IP ad PM, ita erit AB ad BG: vtq; IP ad PL, ita erit AB ad BH: igitur vt IP quadratum ad MPL rectangulum, ita erit AB quadratum ad GBH hoc eſt ABK, rectangulum, & ita AB ad BK, vel BC. Itaque & BC eiuſdem NBO ſectionis ſiue hyperbolæ erit recta parameter, ideoque & B vertex, & BD axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Exhibitus eſt igitur IML conus rectus, & in eius ſuperficie NBO hyperbola problemati ſatisfaciens.

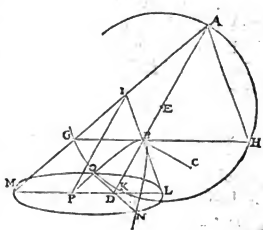
Quarta methodus pro binis ſectionibus in cono ſcaleno.

Oporteat igitur etiam in coni ſcaleni ſuperficie hyperbolem ex-

Digitized by Google

hibere è binis iiſdem & ſubcontrarijs vnam, cuius ſit A B tranſuerſus axis, B C recta parameter, B vertex, & B D diameter ad quam ordinatæ in dato ABC angulo recto applicentur

Sumpta adhuc, vt priùs, recta B K æquali BC, & ſecta AK bifariam in E, centro E interuallo EK deſcribetur circuli circumferentia GKA, cui in G & H occurret recta GH per B ducta ad AB non perpendicularis: ductiſque, vt iam factum eſt, rectis A G, A H, itemque I B L, M D L, quoniam AB per centrum tranſit, erit G A K, hoc eſt GHK, angulus angulo BAH, ſiue KGH, maior vel minor: ideoque & reliquus G H A angulus etiam reliquo AGH angulo maior vel minor:



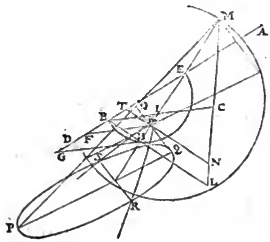
& recta A G maior minorue quàm A H. Quare triangulum GAH ad baſim GH erit ſcalenum, ideoque & eidem ſimile MIL triangulum etiam ad baſim ML ſcalenum erit. Intelligetur itaque I M L conus ſcalenus plano iam per axem ſectus faciente triangulum M I L ad baſim coni rectum, rurſus per rectam A B D ſecari plano ad idem M I L triangulum recto formante in ſuperficie hyperbolam N B O, cuius ſit diameter B D: oſtendeturque, vt ſupra, ducta I P æquidiſtante A B D, propter angulum MIP maiorem, minoremue angulo PIL, hyperbolam NBO, ex eadem 17 huius, vnam eſſe è binis iiſdem & ſubcontrariis exhibiti M I L coni ſectionibus: ipſiuſque axem tranſuerſum eſſe A B, rectam parametrum B C, verticem B, & B D axem, ſiue diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato A B C angulo recto applicabuntur: & ſic etiam problemati ſatisfactum probabitur.

Problematis conſtructio non exiſtente ABC angulo recto ſed obliquo.

Non ſint iam datę A B, B C rectæ lineæ in angulo A B C recto ſed obliquo. Oporteatque, productâ A B in D, conum exhibere, & in eius ſuperficie hyperbolam, cuius A B ſit tranſuerſa diameter, B C contigua parameter, B vertex, & B D diameter ad quam ordinatæ in eodem dato A B C angulo applicentur. Secetur A B bifariam in E: & circa diametrum E B deſcribatur ſemicirculus B H E: productaque E B diametro, ducatur, per 46 huius, recta G H æquidiſtans B C, circumferentiæque occurrens

Digitized by Google

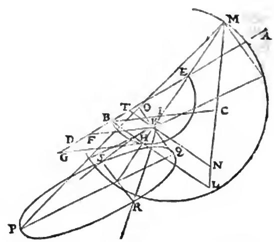
occurrens in H, cuius quadratum ad rectangulum EGB ſe habeat vt BC ad BA. Iunctâque EH quæ rectam BC, vbi opus productam, ſecet in I, ipſarum EH, EI media proportionalis ponatur EK: iungaturque BH, & producatur in L, vt quadrato BH æquale ſit rectangulum KHL: productâque KE in M, vt ſit EM æqualis EK, iungatur ML, ad quam per K ducatur KN æquidiſtans BL. Erit igitur, propter angulum BHE rectum, recta KN ad MK perpendicularis. Datis itaque



poſitione duabus MK, KN rectis lineis terminatis, in dato MKN angulo recto inuicem iunctis, quarum MK ſit ad partes K producta in H, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus quilibet, & in eius ſuperficie hyperbola, cuius ſit MK tranſuerſus axis, KN recta parameter, vertex K, & KH axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicentur. Sitque conus eiuſmodi OPQ, cuius vertex O, baſis PQ circulus, & in eius ſuperficie exhibita RKS hyperbola. Dico hyperbolam RKS problemati ſatisfacere: eiuſque etiam tranſuerſam diametrum eſſe AB, contiguam parametrum BC, verticem B, & BD diametrum ad quam ordinatæ in eodem dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Ducatur KF æquidiſtans GH, & producatur NK in T. Quoniam igitur BL æquidiſtat KN, & productæ MN occurrit in L, rectanguloque KHL æquale eſt quadratum HB, erit, ex 2. ſecundi huius, punctum B in eadem hyperbola cuius ſit MK tranſuerſus axis, & KN recta parameter: eritque BH à ſectione ad axem KH ordinatim applicata. Propter æquales autem EK, EM, eſt E ſectionis centrum: recta igitur AEB eiuſdem etiam ſectionis tranſuerſa erit diameter. Quadrato autem EK æquale eſt rectangulum HEI: recta igitur BI ſectionem contingit in B. Et ei æquidiſtat KF: ordinatim igitur à ſectione ad BD diametrum applicata eſt KF. Sed vt GH ad GE, ita eſt FK ad FE: & vt GH ad GB, ita eſt FK ad FT: igitur vt GH quadratum ad EGB rectangulum, hoc eſt vt BC ad BA, ita erit FK quadratum ad EFT, hoc eſt, propter contingentem KT, ex 25 primi huius, AFB rectangulum: & ita parameter ad contiguam tranſuerſam

diametrum. Exiſtente igitur A B tranſuerſa diametro hyperbolæ per puncta B, K circa K H axem deſcriptæ, & vertice B, erit B C contigua parameter, ſiue iuxta quam poterunt à ſectione ad B D diametrum ordinatim ductæ, quæ & ipſi B C æquidiſtantes erunt, ideoque & in angulo ipſi dato A B C æquali applicatæ. Quare cum vtriuſque & R K S, & per B, K puncta circa axem K H

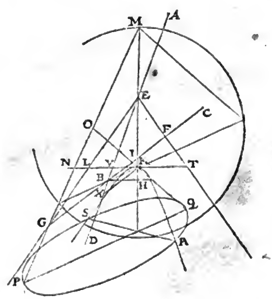


deſcriptæ hyperbolæ idem ſit axis tranſuerſus K M, eademque recta parameter K N, erit altera alteri hyperbola eadem. Exhibitus eſt igitur O P Q conus, & in eius ſuperficie hyperbola R K S, cuius etiam A B ſit tranſuerſa diameter, B C contigua parameter, B vertex, & B D diameter ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quod facere & demonſtrare oportebat.

Aliter, exiſtente adhuc angulo ABC obliquo.

Sint rurſus datæ, vt ſupra, binæ A B, B C rectæ lineæ, in dato A B C angulo obliquo.

Diuiſâ A B bifariam in E, ſumatur in B C recta B F quæ poſſit quadrantem figuræ ſub A B, BC: poſitaque B G æquali & in directum BF, iungantur E F, E G: ſectoque bifariam G E F angulo per rectam E H quæ ſecet B C, aut B G, in I, ducatur ad E H perpendicularis B H: ſumptaque E K ipſarum E H, E I media proportionali, ducatur ad E F, productam vbi opus, aut ad E G, recta K L æquidiſtans B H: & vt E K quadratum ad K L quadratum, ita ſit dupla E K, hoc eſt M K, ad K N. Datis itaque duabus MK, KN rectis lineis terminatis, in dato MKN angulo recto



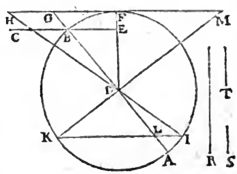
inuicem iunctis, quarum MK ſit producta in H, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus quilibet OPQ, & in eius ſuperficie hyperbola RKS, cuius vertex ſit K, tranſuerſus axis MK, & recta parameter KN, atque KH axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in eodem dato MKN angulo recto applicentur. Dico hyperbolam RKS problemati ſatisfacere, eiuſdemque etiam diametrum tranſuerſam eſſe AB, & contiguam parametrum BC, ac verticem B, & BD diametrum ad quam ordinatæ in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Ducatur ad BD rectæ BC æquidiſtans KX: & in quo KL ſecat AB ſit punctum V. Quoniam igitur vt MK ad KN, hoc eſt vt MK quadratum ad rectangulum MKN, ita eſt EK quadratum ad KL quadratum: cum ſit EK dimidia MK, erit KL quadratum rectanguli MKN quadrans. Quare hyperbolæ cuius ſit MK tranſuerſus axis, & KN recta parameter, vertexque K, & centrum E, hoc eſt hyperbolæ RKS, erit aſymptotos EL: productâque LK ad rectam EF in T, propter æquales ad E angulos, & vtrumque ad K rectum, erit KT æqualis KL: quare & eiuſdem RKS hyperbolæ aſymptotos etiam erit ET. Angulum autem LET ſubtendit recta GBF bifariam ſecta in B: igitur, ex antecedente, recta GF ad EB diametrum ordinatim applicatis erit æquidiſtans. Et ei æquidiſtat KX: punctumque K in ſectione eſt: recta igitur KX à ſectione ad BX, hoc eſt BD, diametrum ordinatim erit applicata. Sed & ſectionem contingit in K recta KL diametro EB occurrens in V: & vt HE ad EK, ita eſt BE ad EV: vtque KE ad EI, ita etiam eſt XE ad EB: ideoque vt XE ad EB, ita eſt BE ad EV: erit igitur punctum B ſectionis vertex: ideoque & dupla EB, hoc eſt AB, tranſuerſa diameter: rectaque BF ſectionem continget in B: & propter EG, EF aſymptotos, vt EB quadratum ad BF quadratum, ſiue ad quadrantem figuræ ſub AB, BC, ita erit AB tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum, & ita AB ad BC. Quare & ſectionis ſiue hyperbolæ per puncta B, K circa axem KH deſcriptæ, & hyperbolę RKS in coni OPQ ſuperficie exhibitæ eadem erit parameter BC tranſuerſę diametro AB contigua. Exhibitus igitur eſt OPQ conus, & in eius ſuperficie hyperbola RKS deſcriptæ per puncta B, K circa axem KH & aſymptotos EL, ET hyperbolæ eadem, cuius ſit tranſuerſa diameter AB, contigua parameter BC, vertex B, & BD diameter ad quam ordinatæ ipſi BC æquidiſtantes in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quare omnimodè problemati erit ſatisfactum. Quod erat propoſitum.

Digitized by Google

LEMMA. XIV. PROBL. XV. PROP. XLIX.

Datis poſitione duabus rectis lineis in dato quocunque angulo non recto inuicem iunctis, quarum altera terminata circuli ſit diameter; inuenire in eiuſdem circuli circumferentia punctum à quo ad eandem diametrum recta ducatur alteri datarum parallela, cuius quadratum ad rectangulum ſub diametri partibus ab ipſa factis datam teneat rationem.



Sint datæ A B, B C rectæ lineæ in dato A B C angulo obliquo: & ſit A B circuli diameter. Oporteatque in circumferentia circuli ſuper A B deſcripti punctum inuenire, à quo ad A B diametrum recta ducatur alteri B C parallela, cuius quadratum ad rectangulum ſub partibus in A B factis ſe habeat vt R ad S.

Si quidem data ratio ſit æqualitatis, hoc eſt ſi R ſit æqualis S; ducta per D centrum recta æquidiſtans B C dabit in circumferentia circuli bina puncta quæ problemati ſatisfacient. Hoc enim liquidò conſtat.

Sit autem R maior quàm S. Poſita T æquali dimidiæ inter vtramque differentiæ, ſectâque A B bifariam in D, ducatur ad B C, vbi opus productam, perpendicularis D E, quæ ad circumferentiam producatur in F: ducaturque F G parallela B C, occurrenſque A B productæ in G: & vt T ad S, ita fiat F G ad G H: iunctaque H D ad circumferentiam producatur in I: agaturque I K ipſi B C parallela, diametrum A B ſecans in L, & circumferentiæ occurrens in K. Dico punctum K problemati ſatisfacere, & quadratum K L ſe habere ad rectangulum A L B, vt R ad S.

Iungatur enim K D, & producatur ad H F productam in M. Quoniam igitur, propter æquales ad I & K angulos, angulus F M D angulo F H D eſt æqualis, erit & M F recta rectæ F H æqualis: ideoque & recta M G rectæ G H, & duplæ F G æqualis erit. Igitur vt dupla T & S ad S, hoc eſt vt R ad S, ita erit M G ad G H: & ita K L ad L I: atque etiam ita K L quadratum ad K L I, hoc eſt A L B rectangulum. Punctum igitur K hoc caſu problemati ſatisfacit.

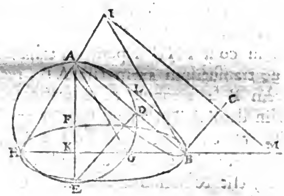
At ſi

Digitized by Google

At ſit R ſit minor quàm S ; ſumptâ , vt prius , T dimidiâ inter vtramque differentiâ , fiet vt T ad R , ita FG ad GH: ductaque HD in I dabit punctum I quæſitum : eritque IL ad LK, hoc eſt IL quadratum ad ILK, ſiue ALB rectangulum, vt GH ad GM , hoc eſt vt R ad S. Inuentum eſt igitur vniuerſè punctum problemati ſatisfaciens. Quod facere & demonſtrare oportebat.

PROBL. XVI. PROP. L.

Datis poſitione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, conum exhibere, & in eius ſuperficie ſectionem quæ ſit ellipſis , cuius vertex ſit punctum ad angulum , & datarum linearum altera parameter , altera contigua tranſuerſa diameter ad quam ordinatæ in eodem dato angulo applicentur.



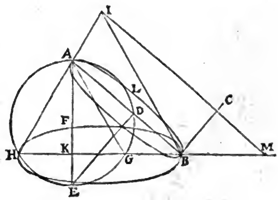
Oportet autem vt, ſi datus angulus ſit rectus, datæ lineæ non ſint inuicem æquales : ſecus enim problema eſſet impoſſibile.

Sint igitur datæ binæ AB , BC rectæ lineæ in dato primùm ABC angulo recto inuicem coniunctæ , & inæquales inuicem. Oporteatque exhibere conum, in cuius ſuperficie ſit ellipſis circa AB tranſuerſam diametrum poſita , cuius vertex ſit B , & contigua parameter BC , & in qua à ſectione ad AB diametrum ordinatim ductæ in eodem ABC recto angulo applicentur.

Prima methodus pro duplici ſubcontraria ſectione in cono recto, ſi AB maior ſit, quàm BC.

Sumatur in AB recta BD æqualis BC : erectaque perpendiculari DE eiuſmodi, vt ſit maior DE ad DA ratio, quàm BD ad DE , iungatur AE , & bifariam ſecetur in F : deſcriptamque centro F circa diametrum AE, circuli circumferentiam ſecet in G & H recta BGH per B ducta ad AE perpendicularis, ipſamque ſecans in K: (ſecabit enim, quoniam ductâ EB, erit, ex 32 huius,

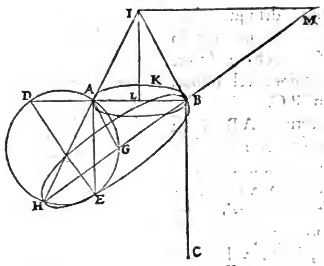
A E B angulus acutus :) iunctiſque A H, A G, ducatur per B ipſi A G æquidiſtans B I, productæ H A occurrens in I. Propter æquales igitur H A E, E A G angulos, & vtrumque ad K rectum, erit A G æqualis A H : ideoque & I B æqualis I H : & angulus H B I angulo B H I æqualis : quare & angulus B H I maior erit angulo A B I : ideoque neque æquidiſtans erit, neque ſubcontrariè poſita recta A B rectæ H B. Intelligatur itaque I H B conus rectus, cuius vertex I, baſis H B circulus, plano ſectus per axem faciente triangulum H I B, rurſus per lineam A B vtrique H I, I B cruri infra verticem occurrentem ſecari plano ad triangulum H I B recto, formante in ſuperficie ſectionem A L B. Erit vtique A L B ſectio ellipſis, eiuſque tranſuerſa diameter A B. Dico igitur ellipſim A L B in coni I H B ſuperficie exhibitam problemati ſatisfacere: eiuſque tranſuerſum axem eſſe A B, rectam parametrum B C, & verticem B : ideoque & à ſectione ad A B diametrum ordinatas in dato A B C angulo recto applicari.



Ducatur enim I M æquidiſtans A B. Quoniam igitur vtrumque per A L B & baſis coni planum ad triangulum H I B eſt rectum, erit & amborum communis ſectio ad idem triangulum recta, ideoque & ad vtramque AB, HB perpendicularis, & H B circuli circumferentiam continget in B : quare &, per 15 primi huius, coni IHB ſuperficiem, ideoq; & ellipſim ALB in ipſo B puncto continget, &, per coroll. 2 ad 17 primi huius, erit ad AB diametrum ordinatim applicatis æquidiſtans. Itaq; & ad A B diametrum ordinatim ductæ in angulo recto applicabuntur. Ellipſeos igitur ALB axis tranſuerſus erit AB. Quoniam autem angulus ADE eſt rectus, circumferentia circa diametrum AE deſcripta tranſibit per D: & rectangulo H B G æquale erit A B D, hoc eſt A B C rectangulum : vtque A B quadratum ad A B D, ſiue H B G rectangulum, ita erit A B ad B D, vel B C. Sed vt A B ad B H, & A B ad B G, ita eſt I M ad M H, & I M ad M B : ideoque vt A B quadratum ad H B G rectangulum, ita eſt I M quadratum ad H M B rectangulum : igitur vt I M quadratum ad H M B rectangulum, ita erit A B ad B C. Quare B C ellipſeos A L B recta erit parameter, & vertex B, atque A B axis, ſiue diameter ad quam ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Sed & quoniam

IHB conus rectus eſt, erit ex 19 huius, in eius ſuperficie exhibita ALB ellipſis è binis iiſdem & ſubcontrariis ſectionibus vna. Exhibitus eſt igitur IHB conus rectus, & in eius ſuperficie ALB ellipſis problemati ſatisfaciens.

Secunda methodus pro ſingulari ſectione in cono ſcaleno: Quando nempe AB minor fuerit quàm BC.



Sint rurſus datæ AB, BC in dato ABC angulo recto: ſitque AB minor quàm BC.

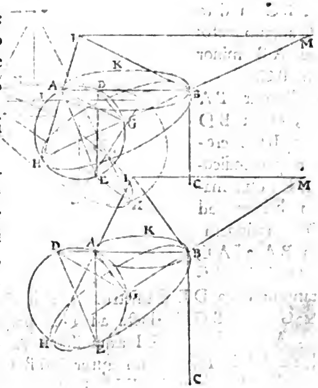
Producatur BA in D, vt ſit BD æqualis BC: erectaque perpendiculari AE, quæ maiorem habeat ad AD rationem quàm BA ad AE, iungatur DE: deſcriptamque circa DE diametrum circuli circumferentiam ſecet in H & G recta BGH ducta ad DE perpendicularis: iunctiſque AH, AG, ducatur BI æquidiſtans AG, occurrenſque HA productæ in I. Triangulum igitur HIB triangulo HAG ſimile erit. Sed propter æquales DH, DG arcus, ideoque & HA arcum maiorem arcu AG, erit AH recta maior quàm AG: ideoque & HI maior quàm IB: triangulum igitur HIB ad baſim HB erit ſcalenum. Ducta autem IL perpendiculari ad AB, quoniam & AE eidem perpendicularis eſt, & ſunt HAE, EAG anguli æquales, erit & AIL angulus angulo LIB æqualis: ideoque & IAB angulus angulo IBA æqualis erit, & angulus IBA maior angulo IHB. Recta igitur AB baſi HB neque æquidiſtans erit, neque ſubcontrariè poſita. Intelligatur itaque IHB conus ſcalenus, cuius vertex A, baſis HB circulus, plano ſectus per axem faciente triangulum HIB ad baſim coni rectum, rurſus per rectam AB ſecari plano ad triangulum HIB recto, formante in ſuperficie ellipſim AKB cuius ſit diameter AB. Dico ellipſim AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie exhibitam problemati ſatisfacere.

Oſtendetur ſiquidem, vt in ſuperiori demonſtratione, ellipſis AKB tranſuerſum axem eſſe AB, & rectam parametrum BC, ac verticem B, ideoque & à ſectione ad diametrum AB ordinatas

Digitized by Google

in angulo recto applicari. Quoniam autem & recta IL angulum HIB biſariam diuidit, & ei perpendicularis eſt AB ſectionis AKB diameter; erit, per 20 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie ſectio ſingularis, ideoque & problemati ſatisfaciens.

Tertia methodus pro duplici ſubcontraria ſectione in cono ſcaleno, exiſtente AB maiore vel minore quàm BC



Sint denique datæ AB, BC in angulo ABC recto: ſitque AB maior, vel minor, quàm BC.

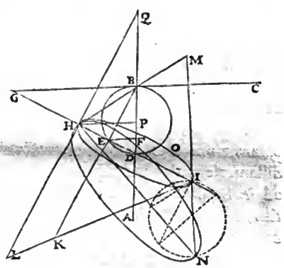
Secetur AB (ſi maior ſit, vt in 1ª. fig.) vel producatur, (ſi minor, vt in 2ª.) in D vt ſit BD æqualis BC: erectaque perpendiculari DE, in 1ª. vel AE, in 2ª. fig. iungatur in 1ª. AE, vel in 2ª. DE, ad quas obliquè ducatur recta BGH circuli circumferentiæ per D, A, E puncta deſcriptæ occurrens in G & H: iunctiſque HA, AG ducatur BI æquidiſtans AG, occurrenſque HA productæ in I: iungaturque DG. Igitur propter HE, EG arcus inæquales, erunt in 1ª. fig. rectæ HA, AG etiam inæquales: ideoque & HI maior vel minor erit quàm IB: & in 2ª. cum ſit angulus AHG minor angulo DHG, hoc eſt GAB: ſitque GAB angulus angulo AGH minor: erit & angulo AGH multo minor AHG angulus: ideoque & recta AH maior erit quàm AG, & HI maior quàm IB: triangulumque HIB vtroque caſu ad HB baſim erit ſcalenum. Sed & angulus GAB, hoc eſt IBA, in 1ª. fig. minor eſt, & in 2ª. maior angulo GDB, hoc eſt IHB: quare recta AB baſi HB neque æquidiſtans erit, neque ſubcontrariè poſita. Intelligatur igitur IHB conus ſcalenus, cuius vertex I, baſis HB circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum HIB ad baſim coni rectum, rurſus per rectam AB ſecari plano ad triangulum HIB recto, formante in ſuperficie ellipſim AKB cuius ſit diameter AB. Dico ellipſim

ellipſim AKB problemati ſatisfacere.

Oſtendetur enim, vt prius, ellipſeos AKB tranſuerſum axem eſſe AB, & rectam parametrum BC, ac verticem B. Sed & neutro caſu recta AB ad biſecantem HIB angulum eſt perpendicularis, (ſiquidem neque AE in 2ª. fig. angulum HAG bifariam diuidit, neque DE in 1ª. ipſum bifariam diuidenti æquidiſtat:) quare, per 17 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie erit exhibita vna è binis iiſdem & ſubcontrariis eiuſdem coni ſectionibus problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

Eiuſdem problematis constructio non exiſtente dato ABC angulo recto, ſed obliquo.

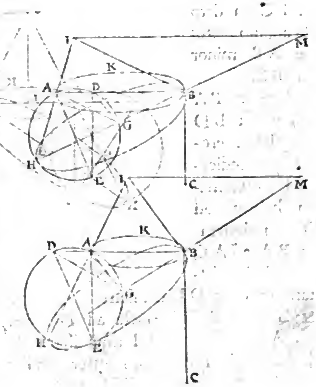
Non ſint autem datæ binæ AB, BC rectæ lineæ in angulo recto, ſed obliquo. Oporteatque conum exhibere, & in eius ſuperficie ellipſim circa tranſuerſam diametrum AB poſitam, cuius vertex ſit B, & BC contigua parameter, cui æquidiſtantes ſint quæ à ſectione ad AB diametrum ordinatim, ideoque in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.



Secetur AB bifariam in D: & circa diametrum BD deſcribatur circuli circumferentia, in qua, per anteced. inueniatur punctum E, à quo ad BD diametrum ducatur recta EF æquidiſtans BC, facienſque rationem quadrati EF ad rectangulum BFD eandem quæ rectæ CB ad rectam BA: iunctaque DE producatur donec rectæ BC, vbi opus productæ, occurrat in G: rectanguloq; GDE æquale ponatur quadratum ex DH: productâq; GD in I, vt ſit DI æqualis DH, iungatur BE, & producatur in K, vt ſit quadrato BE æquale rectangulum HEK: iungaturque IK, & producatur in L, vt ducta HL ſit æquidiſtans EK. Igitur propter angulum BED in ſemicirculo rectum, erit rectus IHL angulus: & propter angulum DBC obliquum, erit & obliquus DBG angulus; ideoque & quadratum BE, hoc eſt rectangulum HEK, rectangulo GED maius erit, vel minus. Quoniam autem vt GD ad DH, ita eſt DH ad DE: &, diuidendo, vt GH ad DH, ita eſt HE ad DE: permutandoq; vt GH ad HE, ita eſt DH,

in angulo recto applicari. Quoniam autem & recta IL angulum HIB biſariam diuidit, & ei perpendicularis eſt AB ſectionis AKB diameter; erit, per 20 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie ſectio ſingularis, ideoque & problemati ſatisfaciens.

Tertia methodus pro duplici ſubcontraria ſectione in cono ſcaleno, exiſtente AB maiore vel minore quàm BC



Sint denique datæ AB, BC in angulo ABC recto: ſitque AB maior, vel minor, quàm BC.

Secetur AB (ſi maior ſit, vt in 1ª. fig.) vel producatur, (ſi minor, vt in 2ª.) in D vt ſit BD æqualis BC: erectaque perpendiculari DE, in 1ª. vel AE, in 2ª. fig. iungatur in 1ª. AE, vel in 2ª. DE, ad quas obliquè ducatur recta BGH circuli circumferentiæ per D, A, E puncta deſcriptæ occurrens in G & H: iunctiſque HA, AG ducatur BI æquidiſtans AG, occurrenſque HA productæ in I: iungaturque DG. Igitur propter HE, EG arcus inæquales, erunt in 1ª. fig. rectæ HA, AG etiam inæquales: ideoque & HI maior vel minor erit quàm IB: & in 2ª. cum ſit angulus AHG minor angulo DHG, hoc eſt GAB: ſitque GAB angulus angulo AGH minor: erit & angulo AGH multo minor AHG angulus: ideoque & recta AH maior erit quàm AG, & HI maior quàm IB: triangulumque HIB vtroque caſu ad HB baſim erit ſcalenum. Sed & angulus GAB, hoc eſt IBA, in 1ª. fig. minor eſt, & in 2ª. maior angulo GDB, hoc eſt IHB: quare recta AB baſi HB neque æquidiſtans erit, neque ſubcontrariè poſita. Intelligatur igitur IHB conus ſcalenus, cuius vertex I, baſis HB circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum HIB ad baſim coni rectum, rurſus per rectam AB ſecari plano ad triangulum HIB recto, formante in ſuperficie ellipſim AKB cuius ſit diameter AB. Dico

ellipſim

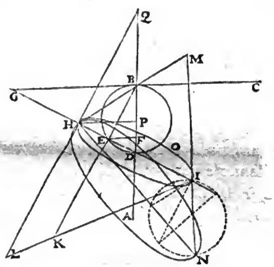
Digitized by Google

ellipſim AKB problemati ſatisfacere.

Oſtendetur enim, vt prius, ellipſeos AKB tranſuerſum axem eſſe AB, & rectam parametrum BC, ac verticem B. Sed & neutro caſu recta AB ad biſecantem HIB angulum eſt perpendicularis, (ſiquidem neque AE in 2ª. fig. angulum HAG bifariam diuidit, neque DE in 1ª. ipſum bifariam diuidenti æquidiſtat:) quare, per 17 huius, ellipſis AKB in expoſiti IHB coni ſcaleni ſuperficie erit exhibita vna è binis iiſdem & ſubcontrariis eiuſdem coni ſectionibus problemati ſatisfaciens. Quod facere oportebat.

Eiuſdem problematis conſtructio non exiſtente dato ABC angulo recto, ſed obliquo.

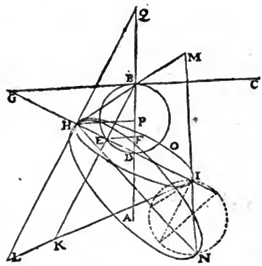
Non ſint autem datæ binæ AB, BC rectæ lineæ in angulo recto, ſed obliquo. Oporteatque conum exhibere, & in eius ſuperficie ellipſim circa tranſuerſam diametrum AB poſitam, cuius vertex ſit B, & BC contigua parameter, cui æquidiſtantes ſint quæ à ſectione ad AB diametrum ordinatim, ideoque in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.



Secetur AB bifariam in D: & circa diametrum BD deſcribatur circuli circumferentia, in qua, per anteced. inueniatur punctum E, à quo ad BD diametrum ducatur recta EF æquidiſtans BC, facienſque rationem quadrati EF ad rectangulum BFD eandem quæ rectæ CB ad rectam BA: iunctaque DE producatur donec rectæ BC, vbi opus productæ, occurrat in G: rectanguloq; GDE æquale ponatur quadratum ex DH: productâq; GD in I, vt ſit DI æqualis DH, iungatur BE, & producatur in K, vt ſit quadrato BE æquale rectangulum HEK: iungaturque IK, & producatur in L, vt ducta HL ſit æquidiſtans EK. Igitur propter angulum BED in ſemicirculo rectum, erit rectus IHL angulus: & propter angulum DBC obliquum, erit & obliquus DBG angulus; ideoque & quadratum BE, hoc eſt rectangulum HEK, rectangulo GED maius erit, vel minus. Quoniam autem vt GD ad DH, ita eſt DH ad DE: &, diuidendo, vt GH ad DH, ita eſt HE ad DE: permutandoq; vt GH ad HE, ita eſt DH,

Digitized by Google

vel DI, ad DE: componendo, vt GE ad HE, ita erit EI ad DE: rectanguloque GED æquale erit HEI rectangulum: quare & eodem HEI rectangulo maius erit vel minus rectangulum HEK: ideoque & recta EK maior vel minor quàm EI: atque etiam recta HL maior vel minor quàm HI. Datis itaque duabus IH, HL terminatis rectis lineis inæqualibus in dato IHL angulo recto inuicem iunctis, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus quilibet, & in eius ſuperficie ellipſis circa IH tranſuerſum axem poſita, cuius ſit H vertex, & HL parameter recta, vt à ſectione ad IH diametrum ordinatim ductæ in eodem dato IHL angulo recto applicentur. Sitque conus huiuſmodi MHN, cuius vertex M, baſis HN circulus, & in eius ſuperficie ellipſis HOI. Dico ellipſim HOI in expoſiti MHN coni ſuperficie exhibitam problemati ſatisfacere: eiuſque etiam tranſuerſam diametrum eſſe AB, verticem B, & contiguam parametrum BC, cui æquidiſtantes erunt quæ a ſectione ad AB diametrum ordinatim, ideoque & in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.

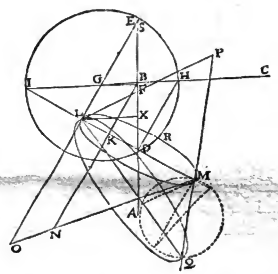


Ducta enim HP æquidiſtante BC, & productâ LH donec productæ AB occurrat in Q, quoniam rectangulo HEK æquale eſt quadratum BE; erit recta BE à ſectione, ſiue ellipſi cuius ſit IH tranſuerſus axis, & recta parameter HL, ad eundem HI axem ordinatim applicata: quare punctum B in eadem ſectione erit. Sed &, propter æquales HD, DI, punctum D centrum eſt ſectionis: recta igitur BDA eiuſdem erit tranſuerſa diameter. Quadrato autem HD æquale eſt rectangulum EDG: ſectionem igitur, ſiue ellipſim per H,B,I,A puncta incedentem recta BG contingit in B: quare & ei æquidiſtans HP erit ab eadem ſectione ad diametrum ADB ordinatim applicata. Sed vt BF ad FE, ita eſt QP ad PH: & vt DF ad FE, ita eſt DP ad PH: quare vt BFD rectangulum ad FE quadratum, hoc eſt vt AB ad BC, ita erit QPD, ſiue, ex 25 primi huius, BPA rectangulum ad PH quadratum. Vt autem BPA rectangulum ad PH quadratum, ita eſt AB tranſuerſa ſectionis diameter ad contiguam parametrum: igitur vt AB tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum, ita erit AB ad BC. Quare & BC eiuſdem per H,B,I,A ſectionis ſiue ellipſeos

Digitized by Google

parameter erit ipſi AB tranſuerſę diametro contigua. Sed vtriuſq; & per H,B,I,A puncta deſcriptæ, & HOI ellipſeos idem eſt HI tranſuerſus axis, & eadem recta parameter HL: altera igitur alteri ellipſis, ex 9 huius, eadem erit. Quare & HOI ellipſis in expoſiti MHN coni ſuperficie exhibita problemati ſatisfaciet: eiuſque etiam tranſuerſa diameter erit AB, & contigua parameter BC, ac vertex B: & in ipſa quæ à ſectione ad AB diametrum ordinatim ducentur erunt ipſi BC æquidiſtantes, ideoque & in eodem dato ABC angulo obliquo applicabuntur.

Aliter exiſtente adhuc dato ABC angulo obliquo.



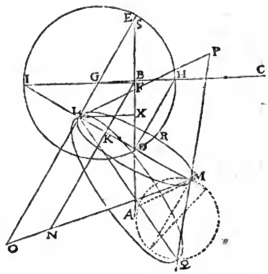
Sint rurſus datæ AB, BC in angulo ABC obliquo.

Secetur AB bifariam in D: productâque DB in E, vt ſit BE dimidiæ BC æqualis, ſecetur DE bifariam in F: erectaque perpendiculari FG quæ rectæ BC, vbi opus productæ, occurrat in G, centro G (vel, ſi AB, BC ſint æquales, ipſo B puncto vt centro) deſcribatur circuli circumferentia DHE quæ rectam BC, vbi opus productam, ſecet in H & I: iunganturq; HD, ID: ductaque ad ipſarum alterutram alteri æquidiſtante recta BK, rectangulo IDK æquale ponatur quadratum ex DL: productâque LD in M, vt ſit DM æqualis DL, producatur BK in N, vt ſit LKN rectangulum quadrato BK æquale: iungaturque MN, & producatur in O, vt iuncta LO ſit æquidiſtans KN. Erit igitur, propter angulum IDH in ſemicirculo rectum, etiam & MLO angulus rectus. Sed, vt in ſuperiori demonſtratione oſtenſum eſt, propter angulum DBI non rectum, quadratum BK, ſiue rectangulum LKN, rectangulo IKD, hoc eſt LKM, maius vel minus erit: ideoq; & recta KN maior vel minor quàm KM: & recta LO maior vel minor quàm LM. Datis igitur duabus ML, LO terminatis rectis lineis inæqualibus, in dato MLO angulo recto inuicem iunctis, exhibeatur, vt iam dictum eſt, conus PLQ, & in eius ſuperficie ellipſis LRM, cuius tranſuerſus axis ſit ML, & recta parameter LO, ideoque & vertex vterque M, L. Dico ellipſim LRM in expoſiti PLQ-

Digitized by Google

coni ſuperficie exhibitam problemati ſatisfacere: & eiuſdem etiam tranſuerſam diametrum eſſe AB, verticem B, & contiguam parametrum BC, cui æquidiſtantes erunt quæcunque ad AB diametrum ordinatim, ideoque in eodem dato ABC angulo obliquo, applicabuntur.

Oſtendetur ſiquidem, vt in ſuperiori demonſtratione factum eſt, ellipſim cuius ſit tranſuerſus axis ML, & recta parameter LO, tranſire per B: rectamq; BC ſectionem contingere in B: & AB eiuſdem eſſe tranſuerſam diametrum. Sed & productâ OL ad diametrum AB in S, & ducta LX æquidiſtante BC, quoniam vt DB ad BE, hoc eſt vt AB ad BC, ita eſt DB quadratum ad DBE, ſiue IBH rectangulum: & vt DB ad BI, ita eſt DX ad XL: vtque DB ad BH, ita eſt SX ad XL: ideoque vt DB quadratum ad IBH rectangulum, ita eſt SXD, hoc eſt, propter contingentem LS, ex 25 primi huius, BXA rectangulum ad XL quadratum, & ita AB tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum: erit & BC eiuſdem per L, B, M, A deſcriptæ ellipſeos parameter ipſi BA tranſuerſæ diametro contigua. Quare cum ellipſis LRM in expoſiti PLQ coni ſuperficie exhibita, propter communem ML tranſuerſum axem, communemque LO rectam parametrum, ipſi per L, B, M, A deſcriptæ ellipſi, ex 9 huius, ſit eadem; & ipſa problemati ſatisfaciet: eiuſdemque etiam tranſuerſa erit diameter AB, contigua parameter BC, ac vertex B, & quæ in ipſa à ſectione ad AB diametrum ordinatim ducentur, in dato eodem ABC angulo obliquo applicabuntur. Quare problemati omnimodè ſatisfactum erit. Quod erat propoſitum.



MONITVM.

Non abs re, neq; inutile fore duximus monuiſſe, nos tria hæc proximè antecedentia problemata ab ipſo olim Apollonio circa Conicorum primi ſui libri finem propoſita hìc inculcaſſe, quanquam aliter paulò concepta & diſpoſita. Hoc autem ideo, quoniam ipſorum conſtructionem minùs concinnam, & propoſito

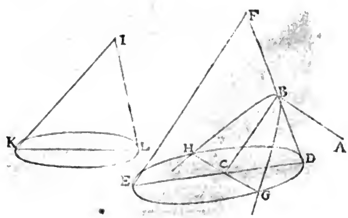
poſito congruentem, demonſtrationemque nonnihil obſcuram in ipſo Apollonio animaduertimus. Quare nouam inſtitimus viam, & συνῳδὸν propriæ cuiuſque quæſiti naturæ conuenientem, ipſamque omnimodam exhibuimus: eandemque ſimplicibus & proprijs, nouiſque etiamnum aliquot, demonſtrationibus firmauimus: vnde liquidò conſtet, quam poſtremo problemati determinationem circa exhibendam ellipticam in coni ſuperficie ſectionem appoſuimus, ipſam in Apolloniano problemate 3°. etiam neceſſariò eſſe adhibendam, quæ tamen ibidem deſideratur. Siquidem vacillantem poſterioris caſus eiuſdem problematis Apollonianam conſtructionem reddiderit illico quicunque expoſitas ibi nouas KH, HM rectas in angulo KHM recto negauerit inæquales: cum vtique ſi æquales eſſent, problema redderetur impoßibile. Sed &, ſi quæ inſuper, quum penitiùs aliquantò in Apollonianorum problematum examen deuenimus, propoſito non ſatis conuenientia deprehendimus, nobis (præocupatâ veniâ, ne præjudicium fiat magni Geometræ nomini & famæ) licitum ſit & liberum dicere; hoc etiam addimus, nequaquam quæſito in triplici illò problemate ab Apollonio ſatisfactum fuiſſe. Siue enim mens illi fuerit coni ſectionum deſcriptionem in plano inſtituere, quæ fuit Eutocij ſententia, haudquaquam per conſtructam in priore caſu circa datum angulum rectum ſolidæ ſectionis figuram, nempe per inuentam & exhibitam in coni ſuperficie ſectionem, problemati videtur ſatisfactum. At verò, ſi ipſas etiam in coni ſuperficie ſectiones inuenire ſibi propoſuit Apollonius, per conſtructam in poſteriori caſu circa datum angulum obliquum planam figuram, & ſimplicem in plano quæſitæ coni ſectionis lineationem, quæ ex præcedentibus nondum ſatis innotuerat, certè neque problemati & quæſito ſatisfactum dicemus. Equidem vix fidem mereri putamus, ſimplicem ſibi coni ſectionum in plano deſcriptionem propoſitam tantùm habuiſſe Apollonium, quam in priore & ſimpliciori caſu non exhibuit, & propter quam in poſteriori inutilis ipſi fuiſſe debuerat ſuſcepta ardua axium & rectarum parametrorum inuentio: cum circa quamlibet diametrum datis poſitione parametris, aut figurarum lateribus vnà cum inclinationis angulo, æquè facilè quæſitum in vno quoque problemate ex antecedentibus obtineri potuiſſet, ac circa axes datis rectis parametris, exhibitis ſcilicet lateribus in angulo recto:

quæ & ipſa priori cuiuſque problematis caſui ſatisfeciſſe potuerant pro ſimplici in plano coni ſectionum deſcriptione. Sed probabilius, aut ſaltem conuenientius eſt, etiam & ipſum conum fuiſſe quæſitum, & quæſitam in eius ſuperficie propoſitam ſectionem: quod vtrumque omnimodè præſtitimus.

Quod conſtructionis viam, quam tenuit Apollonius, attinet, illa proximè ſequentibus conuenientior, ſed generaliùs aptanda nobis viſa eſt.

PROBL. XVII. PROP. LI.

Dato cono: datiſque poſitione duabus rectis lineis in dato angulo inuicem coniunctis, quarum altera ſit terminata; exhibere conum dato ſimilem, & in eius ſuperficie parabolam, cuius datarum altera ſit diameter, altera terminata parameter, & vertex punctum quod eſt ad angulum, ita vt ordinatæ ad eandem diametrum in eodem dato angulo applicentur.



Sit datus IKL conus, cuius vertex I, baſis KL circulus: datæ autem ſint binæ AB, BC rectæ lineæ in dato ABC angulo inuicem coniunctæ: & ſit AB terminata. Oporteatq; conum exhibere dato IKL cono ſimilem, & in eius ſuperficie parabolam, cuius parameter ſit AB, vertex B, & BC diameter ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sit autem datus ABC angulus primùm rectus.

Secetur IKL conus plano per axem ad baſim recto faciente triangulum KIL: & ſumpto in recta BC puncto quolibet C, conſtituantur ad ipſius vtrumque B & C terminum bini BCD, CBD anguli ſinguli ſingulis IKL, KIL angulis æquales: & ſit rectarum BD, CD concurſus in D: productâ autem DC in E, vt ſit rectangulo ABC æquale rectangulum DCE, du-

catur per E ipſi BC parallela EF, occurrens productæ DB in F. Erit igitur vtrumque CBD, EFD triangulum triangulo KIL ſimile. Intelligatur itaque FED conus, cuius vertex F, baſis ED circulus, iam ſectus per axem plano ad baſim recto faciente triangulum EFD, rurſus ſecundùm BC rectam ſecari plano ad triangulum EFD recto formante in ſuperficie ſectionem GBH. Palam eſt quod ſectio GBH erit parabola. Dico igitur conum FED, & exhibitam in eiuſdem ſuperficie parabolam GBH problemati ſatisfacere.

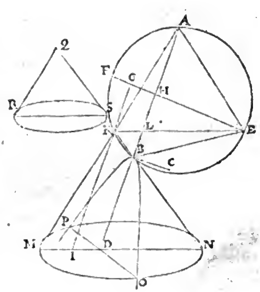
Quoniam enim vtrumque KIL, & EFD triangulum per axem eſt, & ad baſim coni rectum, eſtque alterum alteri ſimile: erit & alter alteri conus, ex definit. nempe conus FED cono IKL ſimilis. Sed & propter rectangulum DCE rectangulo ABC æquale, oſtendetur, vt in 45 huius, parabolæ GBH rectam parametrum eſſe BA, & axem BC ad quem ordinatæ in dato eodem ABC angulo recto applicabuntur. Quare ſic problemati erit ſatisfactum.

Si vero datus ABC angulus non fuerit rectus, ſed obliquus; incumbetur primùm in axis & rectæ parametri inuentionem, vt in eiuſdem 45 huius poſteriori caſu iam factum eſt: & è nouis datis in angulo recto reliqua perficientur vt proximè dicta ſunt: oſtendeturque deſcriptæ circa axem inuentum parabolæ exhibitam in coni ſuperficie parabolam eſſe eandem, cuius etiam ſit BC diameter, & AB contigua parameter, cui æquidiſtantes erunt quæ à ſectione ad eandem BC diametrum ordinatim, ideoque in æquali dato ABC angulo obliquo applicabuntur. Quare & hoc caſu problemati ſic ſatisfactum erit.

Digitized by Google

PROBL. XVIII. PROP. LII.

Dato cono : datiſq; poſitione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis, quarum altera ſit ad partes anguli producta ; exhibere conum dato ſimilem, & in eius ſuperficie hyperbolam cuius datę primùm lineæ ſint altera tranſuerſa diameter, altera contigua parameter, vertexq; punctum quod eſt ad angulum, & producta diameter ad quam ordinatę in eodem dato angulo applicentur.



Oportet autem vt datus conus, ſaltem productus, ſit quæſitæ hyperbolæ capax, hoc eſt, ſi datæ AB, BC rectæ angulum ABC conſtituant rectum, vel, ſi obliquum, quum quęſitæ hyperboles axis exhibebitur vnà cum recta parametro, vt datus vtroq; caſu conus ſit eiuſmodi qui ad 40 huius iam ſupra determinatus eſt.

Sit igitur datus QRS conus, cuius vertex Q, baſis RS circulus, & datæ binæ AB, BC rectæ lineæ terminatæ datum facientes angulum ABC: ſitque AB producta ad partes B in D. Oporteatque conum exhibere dato QRS cono ſimilem, & in eius ſuperficie hyperbolam cuius ſit AB tranſuerſa diameter, & BC contigua parameter, ac vertex B, & BD diameter ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sitque datus ABC angulus primùm rectus.

Secetur QRS conus plano per axem ad baſim recto faciente triangulum RQS: & circa AB rectam deſcribatur circuli circumferentia cuius portio altera ſit verticalis RQS anguli capax: factoque ABE angulo alterutri angulorum qui ad baſim, vt angulo QRS, æquali, occurrat BE eidem circumferentiæ portioni in E: iunctâque AE, ſecetur AEB angulus bifariam per rectam EF quæ circumferentiæ occurrat in F, & rectam AB ſecet in H: vt autem AB ad BC, ita fiat EH ad HG: ducaturque GK æquidiſtans AB, quæ circumferentiam ſecet in K: (hoc autem fieri poſſe conſtat ex determinatione, niſi ſi punctum G

puncto

puncto F coincidat, quo caſu & punctum K vnà coincidet, & ducta ipſi A B æquidiſtans circumferentiam continget in F:) iunctâque E K iungantur A K, K B & producantur donec rectæ M D N ipſi E K æquidiſtanti occurrant in M & N. Intelligatur itaque K M N conus, cuius vertex K, baſis M N circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum M K N ad baſim coni rectum, rurſus ſecari ſecundùm lineam B D plano ad triangulum M K N recto, formante in ſuperficie hyperbolam O B P. Dico conum K M N & exhibitam in eiuſdem ſuperficie hyperbolam O B P problemati ſatisfacere.

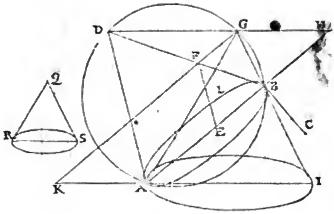
Quoniam enim AEB, hoc eſt MKN, angulus angulo RQS eſt æqualis, angulusque A B E, hoc eſt A K E, ſiue K M N, æqualis angulo Q R S, erit & reliquorum E A B, K N M vterque reliquo Q S R angulo æqualis: triangulum igitur M K N triangulo R Q S ſimile erit. Et vtrumque per axem eſt, & ad baſim coni rectum: conus igitur KMN, ex definit. cono QRS ſimilis erit. Producta autem GK (vel, ſi vt AB ad BC, ita ſit EH ad H F, ducta per F ipſi A B æquidiſtans) rectæ M N occurrat in I. Igitur quoniam propter æquales K A B, K E B angulos, itemque A K E, A B E, & verticales ad L etiam æquales, triangulum K A L, hoc eſt M K I, triangulo B E L ſimile eſt: ideoque & reliquum I K N triangulum reliquo E L A triangulo ſimile: cum vt A B ad B C, ita ſit E H ad H G, hoc eſt E L ad L K: & ita E L quadratum ad E L K, ſiue A L B rectangulum: atque etiam, propter ſimilitudinem triangulorum, vt E L quadratum ad ALB rectangulum, ita K I quadratum ad M I N rectangulum: vt AB ad BC, ita erit KI quadratum ad MIN rectangulum: &, per 14 primi huius, propter triangulum M K N ad baſim coni rectum; ita etiam erit A B tranſuerſus hyperboles O B P axis ad rectam parametrum. Quare & B C etiam recta erit parameter: ideoque & B D axis ad quem ordinatæ in angulo recto applicabuntur. Igitur & problemati ſic ſatisfactum erit.

Non exiſtente autem dato A B C angulo recto, ſed obliquo, inuenientur primùm tranſuerſus axis, & recta parameter, veluti in eiuſdem 48 huius poſteriori caſu factum eſt, & è nouis datis in angulo recto reliqua perficientur vt proximè dictum eſt: demonſtrabiturque deſcriptæ circa inuentum axem hyperbolæ exhibita in coni ſuperficie hyperbola eadem, cuius etiam datæ A B, B C lineæ ſint altera tranſuerſa diameter, altera contigua parameter.

Digitized by Google

PROB. XIX. PROP. LIII.

Dato cono: datiſq; poſitione duabus rectis lineis terminatis in dato quocunque angulo inuicem iunctis; exhibere conum dato ſimilem, & in eius ſuperficie ellipſim cuius vertex ſit punctum ad angulum, & datarum linearum altera parameter, altera tranſuerſa diameter contigua ad quam ordinatæ in dato eodem angulo applicentur.



Oportet autem rurſus vt, ſi datus angulus ſit rectus, datæ rectę lineæ ſint inuicem inæquales.

Sit igitur datus QRS conus, cuius vertex Q, baſis RS circulus, & datę binę AB, BC rectæ lineæ terminatę, in dato ABC angulo inuicem coniunctæ. Oporteatque conum exhibere dato QRS cono ſimilem, & in eius ſuperficie ellipſim, cuius BC ſit parameter, vertex B, & AB tranſuerſa diameter contigua ad quam ordinatæ in dato eodem ABC angulo applicentur. Sitque datus ABC angulus primùm rectus: ideoque & rectæ AB, BC inæquales ſint inuicem.

Secetur QRS conus per axem plano ad baſim recto faciente triangulum RQS: & ſuper AB rectâ deſcribatur circuli circumferentia cuius altera portio ſit verticalis RQS anguli capax: fiatque BAD angulus alterutri eorum qui ad baſim, vt QRS, angulo æqualis: occurratque AD circumferentiæ in D: iunctâque BD, ſumatur in BA recta BE æqualis BC: ductaque EF æquidiſtante AD quæ occurrat BD in F, ducatur FG æquidiſtans AB, & circumferentiæ occurrens in G: iunganturq; DG, GA, GB: ducta autem per A recta IAK æquidiſtans DG rectis GB, GF productis occurrat in I & K. Erit igitur angulus GBA ſingulis GIA, & DBA, hoc eſt DGA, ſiue GAI, maior: ideoq; rectę BA recta AI neque æquidiſtans, neque ſubcontrariè erit poſita. Intelligatur itaque GAI conus, cuius vertex G, baſis AI circulus, plano per axem ſectus faciente triangulum AGI ad baſim coni rectum,

rurſus per rectam A B ſecari plano ad triangulum A G I recto formante in ſuperficie ellipſim A L B. Dico conum G A I, & exhibitam in eiuſdem ſuperficie ellipſim A B L problemati ſatisfacere.

Producta D G productæ A B occurrat in H. Quoniam igitur propter æquales B D A, hoc eſt B G A, & R Q S angulos, itemque BAD, hoc eſt B G H, vel B I A, & Q R S etiam æquales, erit & reliquorum vterque G A I, & D B A angulus reliquo Q S R angulo æqualis: ideoque & vnumquodque A G I, A D B triangulum triangulo R Q S ſimile. Sed & vtrumque A G I & R Q S per axem eſt, & ad baſim coni rectum: conus igitur G A I cono Q R S ſimilis erit. Quoniam autem vt A B ad B C, vel B E, ita eſt D B ad B F: & ita D H ad H G, hoc eſt ita D H quadratum ad D H G, ſiue A H B rectangulum: cum ſit G I K angulus angulo H A D ęqualis, & in parallelogrammo K H etiam angulus ad H angulo ad K æqualis ſit, ideoque & reliquus I G K reliquo A D H: vtque D H ad H A, ita ſit G K ad K I: & propter ſimilitudinem triangulorum D B H, G A K, vt D H ad H B, ita etiam ſit G K ad K A: vt D H quadratum ad A H B rectangulum, hoc eſt vt A B ad B C, ita erit G K quadratum ad I K A rectangulum: & ita, ex 14 primi huius, tranſuerſa ellipſeos B L A diameter A B ad contiguam parametrum. Propter vtrumq; autem per B L A, & baſis coni planum ad triangulum A G I rectum, erit A B tranſuerſus ellipſeos A L B axis. Igitur & B C eiuſdem erit recta parameter: ideoque à ſectione ad A B diametrum ordinatæ in eodem dato A B C angulo recto applicabuntur. Quare & ſic problemati ſatisfactum erit.

Non exiſtente autem dato A B C angulo recto, ſed obliquo, inuenientur primò, vt in 50 huius poſteriori caſu factum eſt, ſectionis axis tranſuerſus, & recta parameter: atque è nouis datis in angulo recto reliqua etiam perficientur vt proximè dictum eſt: oſtendeturque deſcriptę circa inuentum axem ellipſi exhibita in coni ſuperficie ellipſis eadem, cuius ideo ſit etiam A B tranſuerſa diameter, & B C contigua parameter.

THEOR. XXV. PROP. LIV.

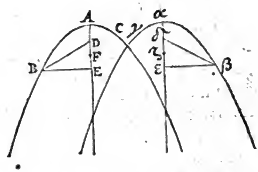
Si binæ parabolę ęquales habeant axis portiones vertice & vmbilico interceptas; erit altera alteri eadem.

Hoc autem ſatis conſtat. Quoniam ſi æquales habeant rectas parametros, erit, ex 8 huius, altera alteri eadem. Atqui ſi æquales habeant axis portiones vertice & vmbilico interceptas, etiam, ex definit. & earum quadruplas, rectas ſcilicet parametros, æquales habebunt.

Digitized by Google

THEOR. XXVI. PROP. LV.

Si in binis parabolis vtrobique recta à ſectione ad vmbilicum inclinetur ſub æqualibus cum axe angulis, & ad eaſdem ſectionis partes: ſitque vnius inclinata alterius inclinatę æqualis; erit altera alteri parabola eadem.



Sint binæ parabolæ BAC, βαγ, quarum axes AD, αδ, vmbilici D, δ: ſint autem à ſectione inclinatæ rectæ BD, βδ, quæ æquales ſint inuicem, & æquales faciant BDA, βδα angulos. Dico parabolam βαγ parabolæ BAC eſſe eandem.

Si quidem enim ſit vterque BDA, βδα angulus rectus, erit vtraq; BD, βδ rectæ parametri dimidia: ideoque &, propter æquales rectas parametros, erit, ex 8 huius, altera alteri parabola eadem.

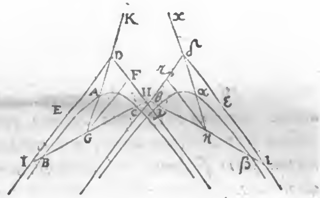
Sint autem anguli BDA, βδα non recti. Ducantur perpendiculares BE, βε, & bifariam ſecentur DE, δε in F & ζ. Æqualis eſt igitur βδε angulus angulo BDE: quare & recta βε rectæ BE, & recta δε rectæ DE erit æqualis: ideoq; & dimidia ζδ dimidiæ FD etiam æqualis erit. Quadrato autem BE æquale eſt quadruplum EAD rectangulum: quadratoque βε æquale quadruplum εαδ rectangulum: quare & rectangulum εαδ rectangulo EAD erit æquale: & additis æqualibus FD, ζδ quadratis, erit quadratum ex ζα quadrato ex FA æquale, rectaque ζα rectæ FA æqualis: quare & reliqua δα, vel (ſi perpendiculares BE, βε ſupra vmbilicos D, δ cadant) compoſita, reliquæ, vel compoſitæ, DA erit æqualis. Igitur, ex antecedente, parabola βαγ parabolę BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR.

THEOR. XXVII. PROP. LVI.

Si binæ hyperbolę ęqualibus aſymptoton angulis contineantur: & recta à centro vnius ad ſectionem ducta æqualis ſit rectæ à centro alterius ad ſectionem ductę aſymptoton angulum ſimilitęr diuidenti; erit altera alteri hyperbola eadem.

Sint binę hyperbolæ BAC, βαγ: quarum aſymptoti DE, DF, itemque δε, δζ æquales contineant EDF, εδζ angulos: ſit autem & δα à centro ad ſectionem ducta ductæ DA æqualis: atque etiam angulus εδα angulo EDA æqualis. Dico hyperbolam βαγ hyperbolæ BAC eſſe eandem.

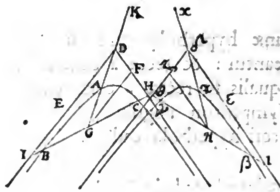


Producantur vtrobique DA, δα in G & η, vt ſit αη æqualis AG: ductaque GF æquidiſtans ſit DE: & ſumptâ FH æquali DF, iungatur HG & producatur in I ſectioni occurrens in B & C: ſimiliter & ducta ηζ æquidiſtans ſit δε: ſumptâque ζθ æquali δζ, iungatur θη, & producatur in ι ſectioni item occurrens in β, γ. Æquales igitur erunt HG, GI, itemque θη, ηι. Sed & propter æquales δη, DG rectas, & angulum ζδη angulo FDG æqualem, atque angulum δηζ angulo DGF, erit & recta δζ rectæ DF; ideoq; & recta δθ rectæ DH æqualis: quare & recta θη rectę HG etiam æqualis erit: ideoq; & angulus δηθ angulo DGH æqualis. Igitur vt DG quadratum ad GH quadratum, ita erit δη quadratum ad ηθ quadratum. Sed propter æquales, ex coroll. 2 ad 39 primi huius, HC, BI, itemq; θγ, βι, ideoq; & reliquam GB reliquæ CG equalem, & reliquam ηβ reliquæ γη, ordinatim à ſectione ad DG diametrum applicata eſt CG, & ad δη diametrum ordinatim applicata γη: ideoque vt DG quadratum ad GH quadratum, ita, ſumptâ DK equali & in directum AD, eſt rectangulum KGA ad quadratum GC: & vt δη quadratum ad ηθ quadratum, ita etiam eſt, ſumptâ δκ æquali, & in directum αδ, rectangulum κηα ad quadratum ηγ, hoc enim in eadem 39 primi huius demonſtratum eſt: eſtq; rectangulum κηα rectangulo KGA

Lll

Digitized by Google

æquale: igitur & quadrato CG æquale erit quadratum γη: ideoq; & recta γη rectæ CG ęqualis. Eſtq; κα tranſuerſa hyperbolæ βαγ diameter rectę KA tranſuerſæ diametro BAC hyperbolæ æqualis: atq; etiam recta αη rectæ AG æqualis: & angulus αηγ angulo AGC æqualis: hyperbola igitur βαγ hyperbolæ BAC, ex 7 huius, eadem erit. Quod erat demonſtrandum.



MONITVM.

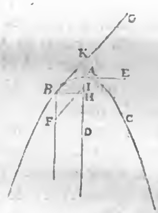
Hactenus affatim ſatis ipſas eiuſdem nominis coni ſectiones ſiue in plano, ſiue in coni ſuperficie exhibitas è datis ſimilibus & æqualibus diametris, aut parametris, comparauimus inuicem: & qua ratione propoſitæ qualibet ex ipſis eædem ſint inuicem necne, aut eiuſmodi eſſe dignoſci queant, notum ſatis fecimus, & demonſtratione firmauimus. Quanquam enim plures adduci poterant methodi, è quibus ſuſcepto datorum examine concluſiones eædem præmiſſis deduci facile potuiſſent, attamen præcipuas tantùm recenſere nobis viſum eſt in quas reliquæ omnes facilè reſoluantur & recidant: ne iſtiuſmodi diſcuſſio pro varijs & innumeris datorum differentijs in immenſum abiret. Sed & nonnulla fuerunt in ſpecialem ſequentis libri de ſimilibus coni ſectionibus tractatum aſſeruandæ: ſiquidem germanæ ſunt ambæ hæ de iiſdem & de ſimilibus coni ſectionibus ſpeculationes, ideoque & quaſi ex æquo in ſortem veniunt, & meſſem partiuntur. Supereſt tamen etiamnum vt ipſas coni ſectiones ſiue etiam in plano expoſitas, ſiue in coni ſuperficie conſideratas è datis diſſimilibus & inæqualibus diametris aut parametris comparemus inuicem: quò tandem ex eiuſmodi etiam datis, aut cognitis, binas aut quotcunq; propoſitas eiuſdem nominis ſectiones eaſdem inuicem pronunciemus & comprobemus. Denique & ipſas è datis æqualibus ſed diſſimilibus diametris ac parametris &

Digitized by Google

in plano, & in coni ſuperficie conferemus etiam inuicem, quò omnimodę dignoſci valeant & cautiùs ad optata aſſumi: nobilemque hanc circa ipſarum examen & notitiam inſtitutam ſpeculationem nonnihil promouebimus, nobilibuſq; aliquot propoſitionibus ad inſtitutum profuturis, & ad ſolidos alioqui locos maximè vtilibus, ipſam ampliabimus.

THEOR. XXVIII. PROP. LVII.

In omni parabola, cuicunque diametro contigua parameter rectam parametrum ſuperat quadrupla axis portione intercepta eiuſdem vertice & ordinatim ab aſſumptę diametri vertice applicata.

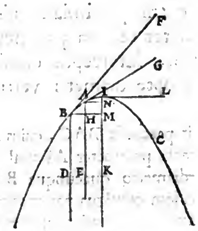


Sit parabola BAC, cuius axis AD, & recta parameter AE: aſſumpta autem diametro quacunque BF, ducatur eidem contigua parameter BG, & ad axem ordinatim applicetur BH. Dico BG parametrum ſuperare parametrum AE quadruplâ AH. Sumatur enim quadranti AE æqualis AI: (niſi ſi ipſa AH eidem quadranti ex AE iam ſit æqualis:) & per I ducta ipſi BG æquidiſtans diametro BF occurrat in F: occurratque BG axi DA producto in K. Igitur, ex 44 huius, erit BF quadranti BG æqualis. Quoniam autem contingit BG, & ordinatim applicata eſt BH, erit, ex 18 primi huius, AK æqualis AH: quare & KI, hoc eſt BF, binis AI, AH erit æqualis. Igitur & quadrupla BF, hoc eſt BG, æqualis erit quadruplæ AI, hoc eſt AE, & quadruplæ AH. Superat igitur parameter BG rectam AE parametrum quadruplâ AH. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIX. PROP. LVIII.

In omni parabola, binarum inæqualium parametrorum maior ſemper remotiori ab axe diametro contigua eſt, minoremque ſuperat quadrupla propioris diametri portione intercepta eiuſdem vertice & perpendiculari ad ipſam à remotioris vertice ducta.

Sit parabola BAC, cuius axis IK, & binæ diametri quæcunq; AE, BD, ipſiſque contiguę parametri AG, BF; ſitque BF maior quàm AG: & BH perpendicularis ad AE. Dico diametrum BD longiùs abeſſe ab axe IK quàm AE: & parametrum BF ſuperare parametrum AG quadruplâ AH.



Secet enim BH axem IK, aut ei producta occurrat in M, ipſiq; æquidiſtans ducatur AN: & ſit IL recta parameter. Quoniam igitur, ex anteced. ſuperat AG ipſam IL quadruplâ IN, & eandem IL ſuperat BF quadruplâ IM, erit IM maior quàm IN: ideoque & BM maior quàm AN: rectaq; AG vnà cum quadrupla NM, hoc eſt AH, rectæ BF erit ęqualis. Quare & BF diameter remotior erit ab axe IK quàm AE: & recta BF rectam AG ſuperabit quadruplâ AH. Quod vtrumque erat demonſtrandum.

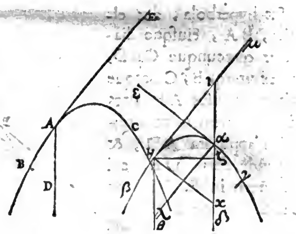
COROLL.

Hinc conſtat, In parabola parametros omnes ad eaſdem axis partes ductas inuicem eſſe inæquales: & omnium minimam eſſe, quę axi contigua ducitur: atque eidem propiorem remotiore ſemper eſſe maiorem: binaſque tantum ex vtraque axis parte æqualiter à vertice diſtantes duci poſſe inuicem ęquales.

THEOR

THEOR. XXX. PROP. LIX.

Si ſint binæ parabolæ, & vtrobiq; recta ſectionem contingat æqualis ei iuxta quam poſſunt à ſectione ad diametrum per contactum ductam ordinatim applicatæ: ſintque tam contingentes inuicem, quam anguli ab ipſis cum contiguis diametris facti etiam inuicem inæquales: quadranti autem exceſſus quo maior contingens minorem ſuperat æquali ſumptâ diametri minori contingenti contiguæ portione à vertice, indidem educta perpendicularis ſectioni occurrat in puncto à quo ducta contingens cum contigua diametro æqualem faciat angulum ei qui in altera ſectione à diametro & contingente continetur; erit altera alteri parabola eadem.



Sint binæ parabolæ B A C, βαγ, quarum diametri A D, αδ, & contiguæ parametri A E, αε: ſitque parameter A E maior parametro αε, & angulus D A E maior angulo δαε: ſumptâ autem αζ, quæ ſit æqualis quadranti differentiæ ipſarum A E, αε, & educta perpendiculari ζη quæ ſectioni occurrat in η, ductiſq; ηθ diametro, & contingente ηι, ſit angulus θηι æqualis angulo D A E. Dico parabolam βαγ parabolæ B A C eſſe eandem.

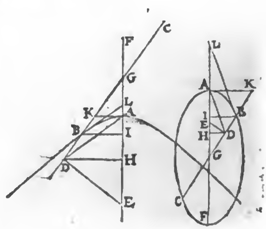
Producta ζα diameter contingenti ηι occurrat in ι: ipſiſque αι, ηι æquidiſtantes ducantur ηκ, αλ. Ordinatim igitur à ſectione erunt applicatæ ηκ quidem ad diametrum αζ, & αλ ad diametrum ηθ. Quoniam autem angulus θηι, hoc eſt θλα, maior eſt angulo δαε, hoc eſt δκη, ideoque & reliquus ηλα, hoc eſt ηικ minor reliquo ηκι, erit recta ηκ minor quâm ηι, hoc eſt αλ: quare & quadratum αλ quadrato ηκ maius erit, hoc eſt rectangulum ſub ηλ & contigua parametro maius rectangulo ſub ακ & contigua αε parametro. Suntque, propter contingentem ηι, & ordinatim applicatam ηκ, rectæ ια,

Digitized by Google

hoc eſt $\eta\lambda$, & $\alpha\kappa$ inuicem æquales: parameter igitur diametro $\gamma\theta$ contigua maior erit parametro $\alpha\epsilon$, &, ex antecedente ipſam ſuperabit quadruplâ $\alpha\zeta$. Sit igitur $\eta\mu$ æqualis rectæ $\alpha\epsilon$, & quadruplę $\alpha\zeta$: erit $\eta\mu$ parameter parametro AE æqualis. Sed angulus $\theta\eta\mu$ angulo DAE eſt etiam æqualis: igitur, ex 8 huius, parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXI. PROP. LX.

In omni hyperbola, aut ellipſi, ſi ad expoſitam quamcunque diametrum à ſupremo vertice recta ordinatim applicetur, à cuius termino vſque ad axem eidem diametro perpendicularis excitetur; quæ erit ratio rectanguli ſub eiuſdem diametri partibus vtroque tranſuerſæ termino & ordinatim ductâ interceptis ad eductę perpendicularis quadratum, eadem erit & tranſuerſi axis ad rectam ſectionis parametrum.



Sit hyperbola, aut ellipſis, BA, eiuſque diameter quæcunque CBD, vertex vterq; B, C, atque axis tranſuerſus AF: ſitqſ ad BD diametrum ordinatim applicata AD, & perpendicularis DE axi occurrens in E. Dico vt CDB rectangulum ad quadratum DE, ita eſſe tranſuerſum axem AF ad rectam ſectionis parametrum.

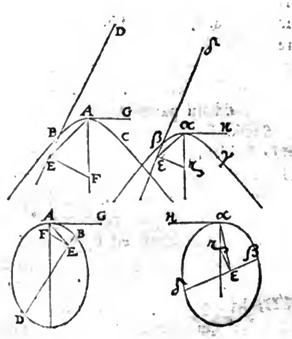
Ordinatim ad axem applicentur AK, BI, DH: ducaturq; BL ęquidiſtans AD: & ſit ſectionis centrum G. Igitur quoniam BL ęquidiſtans AD ſectionem contingit in B, & ordinatim applicata eſt BI, erit, ex 25 primi huius, rectangulo FIA æquale rectangulum GIL. Similiter & propter contingentem AK, & ordinatim applicatam AD, erit rectangulo CDB æquale rectangulum GDK. Quoniam autem vt GD ad DE, ita eſt GH ad HD: & vt GD ad DK, ita eſt GH ad HA: ex æquali vt DK ad DE, ita erit HA ad HD: quare, componendo, vt GDK rectangulum ad DE quadratum, ita erit GHA rectangulum ad HD quadratum. Sed ratio GHA rectanguli ad HD quadratum compoſita eſt ex ratione GH ad HD, hoc eſt GI ad IB, & ex ratione

Digitized by Google

AH ad HD, hoc eſt LI ad IB: quare vt GHA rectangulum ad HD quadratum, hoc eſt vt GDK rectangulum ad DE quadratum, ita erit GIL rectangulum ad IB quadratum. Sed &, ex coroll. ad eandem 25 primi huius, ita etiam eſt FA tranſuerſus axis ad rectam parametrum: igitur vt GDK; hoc eſt CDB rectangulum ad DE quadratum, ita erit FA tranſuerſus axis ad rectam parametrum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXII. PROP. LXI.

Si ſint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, & vtrobique rectâ à ſupremo vertice ad expoſitam quamcunq; diametrum ordinatim ductâ, eadem ſit vtrobique ratio rectanguli ſub diametri partibus vtroque tranſuerſæ termino & applicatâ interceptis ad contiguę vſque ad axem eductæ eidem diametro perpendicularis quadratum: ſitque etiam recta huius parameter alterius rectę parametro æqualis; erit altera alteri hyperbola, aut ellipſis, eadem.



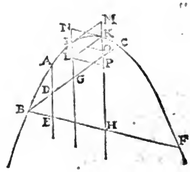
Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, & earum diametri quęlibet DBE, $\delta\beta\epsilon$, axes AF, $\alpha\zeta$, & rectæ parametri AG, $\alpha\eta$: ſit autem ad DBE diametrum ordinatim applicata AE, & ad diametrum $\delta\beta\epsilon$ ordinatim applicata $\alpha\epsilon$: ductiſque perpendicularibus EF, $\epsilon\zeta$, eadem ſit rectanguli $\delta\epsilon\beta$ ad quadratum $\epsilon\zeta$ ratio quæ rectanguli DEB ad quadratum EF: ſitq; hyperbolæ, vel ellipſis $\beta\alpha\gamma$ recta parameter $\alpha\eta$ æqualis AG rectæ parametro hyperbolæ, vel ellipſis BAC. Dico hyperbolam, vel ellipſim $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi BAC eſſe eandem.

Quoniam enim, ex antecedente, vt DEB rectangulum ad EF quadratum, ita eſt tranſuerſus hyperbolæ, vel ellipſis BAC axis ad rectam parametrum: & vt rectangulum $\delta\epsilon\beta$ ad quadratum

εζ, ita eſt tranſuerſus hyperbolæ, vel ellipſis $\beta\alpha\gamma$ axis ad rectam parametrum: vt tranſuerſus axis ſectionis BAC ad rectam parametrum, ita erit ſectionis $\beta\alpha\gamma$ tranſuerſus axis ad rectam parametrum, & permutatim. Suntq; rectæ parametri inuicem æquales: igitur & æquales inuicem erunt axes tranſuerſi. Quare, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipſis $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi BAC eadem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXIII. PROP. LXII.

In omni parabola, ſi ab eodem ſectionis puncto ad quamlibet diametrum binæ rectę quomodocunque inclinentur; vt erunt ipſarum quadrata inuicem, ita erunt diametrorum quæ ipſis ęquidiſtantes biſariam diuident contiguæ parametri inuicem.



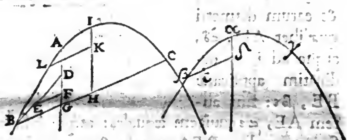
Sit parabola BAC, eiuſque diameter AE: ducanturq; quomodocunque rectæ BD, BE. Dico vt BD quadratum ad BE quadratum, ita eſſe parametrum diametro æquidiſtantes rectæ BD biſariam diuidenti contiguam ad contiguam diametro æquidiſtantes BE biſariam diuidenti parametrum.

Sectioni occurrant productę BD quidem in C, & BE in F: ſectiſque biſariam BC in G, & BF in H, ducantur GI, HK æquidiſtantes AE, quę ſectioni occurrant in I & K. Itaque ſectionis diametri erunt IG, KH, & ad ipſas ordinatim applicatę BG quidem ad IG, & BH ad KH. Oſtendendum eſt igitur vt BD quadratum ad BE quadratum, ita eſſe parametrum diametro IG contiguam ad contiguam diametro KH parametrum. Ducantur ad IG diametrum rectæ KL, MI ęquidiſtantes BG: & ad KH diametrum rectæ KN, IO, LP ęquidiſtantes BH. Ordinatim igitur erunt applicatæ KL quidem ad diametrum IG, & IO ad KH diametrum: quare & ipſis æquidiſtantes KN, IM ſectionem contingent in K & I: ideoque & rectæ NI, hoc eſt KO, & IL æquales erunt inuicem. Sed vt quadratum BD ad BE quadratum, ita eſt KL quadratum ad LP, hoc eſt IO, quadratum: & vt KL quadratum ad IO quadratum, ita eſt rectangulum, vel parallelogrammum, ſub recta IL & contigua parametro ad rectangulum, vel parallelo-

parallelogrammum, ſub recta KO, ſiue IL, & contigua parametro, hoc eſt ita contigua diametro IL parameter ad contiguam diametro KO parametrum: igitur vt BD quadratum ad BE quadratum, ita erit contigua diametro IG parameter ad contiguam diametro KH parametrum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXIV. PROP. LXIII.

Si ſint binę parabolæ, & vtrobique ad expoſitam quamcunque diametrum recta ducatur ordinatim applicata: atque ab alterutrius ductæ puncto quolibet ad diametrum recta ducatur ęqualem faciens angulum ei qui in altera ſectione ducta & diametro continetur; ſit autem quadratum rectæ ordinatim applicatæ ad quadratum conterminæ ductæ, vt contigua eidem diametro parameter ad contiguam alteri diametro parametrum; erit altera alteri parabola eadem.



Sint binæ parabolę BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum diametri quælibet AD, $\alpha\delta$: ſitque ad AD diametrum ordinatim applicata ED; & ad diametrum $\alpha\delta$ ordinatim applicata $\varepsilon\delta$: à quolibet autem in ED puncto E ductâ EF quæ cum AD diametro faciat angulum EFA angulo $\varepsilon\delta\alpha$ æqualem, vt contigua diametro AD parameter ad contiguam diametro $\alpha\delta$ parametrum, ita ſit quadratum ED ad quadratum EF. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eſſe eandem.

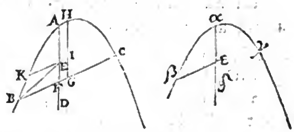
Vtrobique ſectioni occurrant DE quidem in B, & $\delta\varepsilon$ in β: ductâq; BG æquidiſtante EF, & productâ ad ſectionem in C, ſecetur BC bifariam in H: ductaque HI æquidiſtans AD ſectioni occurrat in I. Sectionis igitur diameter erit IH, & ad ipſam ordinatim applicata BH. Quoniam autem vt BD quadratum ad BG quadratum, hoc eſt vt ED quadratum ad EF quadratum, ita eſt contigua diametro AD parameter ad contiguam diametro $\alpha\delta$ parametrum, & ita, ex anteced. contigua diametro AD parameter ad conguam diametro IH parametrum, erunt ipſis IH, $\alpha\delta$ diametris contiguæ parametri inuicem æquales. Sumptâ itaque IK æquali $\alpha\delta$, & ductâ ad ſectionem rectâ KL æquidiſtante BG, quæ & ad IH diametrum ordinatim erit applicata, erit quadratum LK quadrato $\beta\delta$ æquale, ideoq; & recta LK rectæ $\beta\delta$ æqualis. Sed & angulus LKI, hoc eſt EFA, vel BGA, angulo $\beta\delta\alpha$ etiam eſt

Digitized by Google

æqualis: igitur, ex 5 huius, erit parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC eadem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXV. PROP. LXIV.

Si ſint binæ parabolę, & vtrobique à ſectione ad expoſitam quamcunque diametrum recta ſit ordinatim applicata, ita vt ſint interceptæ diametrorum portiones à vertice æquales inuicem: & ab vtriuſlibet applicatæ termino in ſectione recta alteri æqualis ad diametrum aptata æqualem faciat angulum ei qui in altera ſectione ordinatim ductâ & diametro continetur: erit altera alteri parabola eadem.



Sint binæ parabolę BAC, $\beta\alpha\gamma$, & earum diametri quælibet AD, $\alpha\delta$, atque ad ipſas ordinatim applicatæ BE, $\beta\epsilon$: ſint autem AE, $\alpha\epsilon$ inuicem æquales: atque inſuper aptata BF æqualis $\beta\epsilon$ faciat angulum BFA angulo $\beta\epsilon\alpha$ æqualem. Dico parabolam $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC eſſe eandem.

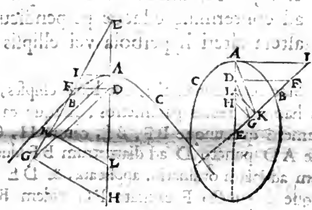
Productâ BF ad ſectionem in C, ſecetur BC bifariam in G: ductaque GH æquidiſtans AD ſectioni occurrat in H: & ſumptâ HI æquali AE, ducatur IK ęquidiſtans BF, quæ ſectioni occurrat in K. Sectionis igitur diameter erit HG, & ad eam ordinatim applicata KI: ideoque, ex 62 huius, vt BE quadratum ad BF quadratum, ita erit parameter diametro AD contigua ad contiguam diametro HG parametrum: & ita rectangulum ſub recta AE & contigua parametro, hoc eſt quadratum BE, ad rectangulum ſub recta HI & contigua parametro, hoc eſt ad quadratum KI. Quadratum igitur KI quadrato BF erit ęquale: ideoque & recta KI rectæ BF, hoc eſt rectæ $\beta\epsilon$, erit æqualis. Sunt autem & rectæ HI, AE, hoc eſt $\alpha\epsilon$, etiam æquales: atque inſuper angulus KIH, hoc eſt BFA, angulo $\beta\epsilon\alpha$ æqualis: igitur, ex 5 huius, parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolę BAC eadem erit. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

THEOR. XXXVI. PROP. LXV.

In omni hyperbola aut ellipſi, ſi ab axis puncto quolibet ad expoſitam quamcunque diametrum binæ rectæ ducantur, altera ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atq; ab ordinatim applicatę termino recta ad axem educatur eidem diametro perpendicularis; quæ erit ratio rectanguli ſub diametri partibus ordinatim applicatę contiguis à centro & perpendiculari ab axe educta ſumptis ad conterminę perpendicularis quadratum, eadem erit & tranſuerſi ſectionis axis ad rectam parametrum.

Sit hyperbola, aut ellipſis, BAC, eiuſque axis AD, centrum E: ducta autem diametro quacunque EB, & à ſumpto in axe puncto quolibet D ductis DG ordinatim ad EB diametrum



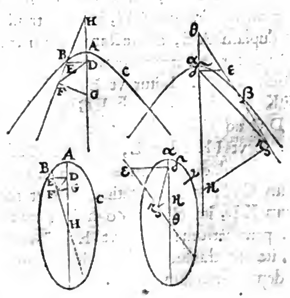
applicatâ, & DF perpendiculari ad AD, erigatur GH diametro EB perpendicularis, axi occurrens in H. Dico vt rectangulum EGF ad quadratum GH, ita eſſe tranſuerſum ſectionis axem, ſcilicet duplam AE, ad rectam parametrum.

Ducantur AI æquidiſtans DF, AK æquidiſtans DG, & KL ęquidiſtans GH. Igitur vt EK ad KL, ita erit EG ad GH: & vt EK ad KA, ita erit EG ad GD: vtque AK ad KI, ita erit DG ad GF: igitur, ex æquali, vt EK ad KI, ita erit EG ad GF: & vt IK ad KL, ita erit FG ad GH: quare vt rectangulum EKI ad quadratum KL, ita erit rectangulum EGF ad quadratum GH, & permutatim. Sed vt rectangulum EKI ad quadratum KL, ita eſt, ex 60 huius, tranſuerſus axis ſectionis ad rectam parametrum: igitur vt EGF rectangulum ad GH quadratum, ita erit tranſuerſus ſectionis axis ad rectam parametrum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXVII. PROP. LXVI.

Si ſint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, æquales habentes rectas parametros, & vtrobique à quolibet in axe puncto ad aſſumptam quamcunque diametrum binæ rectæ agantur, altera ad eandem ordinatim applicata, altera axi perpendicularis: atque etiam vtrobique ordinatim applicatæ contermina ad axem educatur aſſumptę diametro perpendicularis: ſit autem eadem rectanguli ſub vnius diametri partibus ordinatim applicatæ contiguis à centro & perpendiculari ab axe educta ſumptis ad conterminæ perpendicularis quadratum ratio, quę rectanguli ſub alterius diametri partibus ſimiliter ſumptis ad contermine eductæ perpendicularis quadratum; erit altera alteri hyperbola vel ellipſis eadem.

Sint binę hyperbolæ, aut binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quæ ęquales habeant rectas parametros: ſintque earum axes AD, $\alpha\delta$, & diametri quęcunque BF, $\beta\zeta$, centra H, θ: & ſint à quocunq; in axe AD puncto D ad diametrum BF ductæ binæ rectæ DF quidem ad ipſam ordinatim applicata, & DE ad axem perpendicularis; ſitque à puncto F excitata FG eidem BF diametro perpendicularis, quæ axi occurrat in G: ſimiliterque & à quolibet in $\alpha\delta$ axe puncto δ ductis $\delta\zeta$ ad $\beta\zeta$ diametrum ordinata, & $\delta\epsilon$ ad axem perpendiculari, erigatur $\zeta\eta$ eidem $\beta\zeta$ diametro perpendicularis, axi occurrens in η: ſit autem eadem rectanguli $\theta\zeta\epsilon$ ad quadratum $\zeta\eta$ ratio, quę rectanguli HFE ad quadratum FG. Dico hyperbolam, aut ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC eſſe eandem.



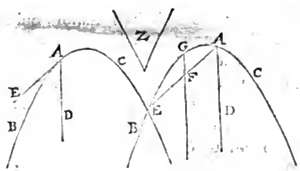
Quoniam enim, ex anteced. vt rectangulum HFE ad quadratum FG, ita eſt tranſuerſus ſectionis BAC axis ad rectam parametrum

metrum: & vt rectangulum $\theta\zeta\iota$ ad quadratum $\zeta\nu$, ita eſt tranſuerſus ſectionis $\beta\alpha\gamma$ axis ad rectam parametrum; vt tranſuerſus ſectionis B A C axis ad rectam parametrum, ita erit ſectionis $\beta\alpha\gamma$ tranſuerſus axis ad rectam parametrum, & permutatim. Suntque rectæ parametri inuicem æquales: igitur & æquales etiam erunt tranſuerſi axes inuicem. Quare, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipſis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, B A C eadem. Quod erat demonſtrandum.

PROBL. XX. PROP. LXVII.

Data coni ſectione, inuenire eiuſdem diametrum ad quam ordinatim ductę in dato angulo applicentur.

Oportet autem, ſi data ſectio ſit ellipſis, vt datus angulus non ſit maior angulo qui lineis à maioris axis terminis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.

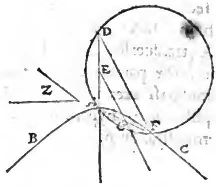


Sit data coni ſectio B A C primùm parabola: datuſque angulus Z. Oporteat inuenire parabolę B A C diametrum ad quam ordinatim ductæ in dato Z angulo applicentur.

Inueniatur parabolæ B A C diameter quæcunque A D: & in puncto A conſtituatur D A E angulus æqualis dato Z angulo. Si quidem recta A E ſectionem contingit in A, erit ipſa A D diameter quæſita: ordinatim enim ad ipſam applicatę contingenti æquidiſtantes ducentur. Sectioni autem occurrat A E in E, eâdemque bifariam ſectâ in F, ducatur recta F G æquidiſtans A D, ſectionique occurrens in G. Dico rectam G F eſſe diametrum quæſitam.

Quoniam enim G F æquidiſtat A D paraboles diametro, erit & ipſa diameter: &, propter rectam A E bifariam ſectam in F, erit vtraque E F, A F ad G F diametrum ordinatim applicata, & ſub eodem dato Z, hoc eſt D A F, vel G F A angulo. Quare quæſito in parabola ſic ſatisfactum erit.

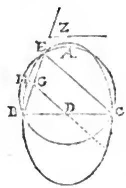
Sit iam data B A C coni ſectio hyperbola: datuſq; item Z angulus.



Inueniatur ſectionis axis tranſuerſus A D, ac centrum E: & ſuper A D deſcribatur circuli circumferentiæ portio D F A dati Z anguli capax, quæ ſectioni occurrat in F: iunctaque A F bifariam ſecetur in G: ducaturque diameter E G. Dico diametrum E G problemati ſatisfacere.

Iunctâ enim D F, quoniam A F bifariam eſt ſecta in G, erit vtraque A G, F G ad E G diametrum ordinatim applicata. Sed & A D bifariam etiam ſecta eſt in E: recta igitur E G rectæ D F erit æquidiſtans, ideoque & angulus A G E angulo A F D, hoc eſt dato Z angulo erit æqualis. Quare & inuenta eſt E G diameter problemati in hyperbola ſatisfaciens.

Sit autem data B A C ſectio ellipſis: datuſque etiam Z angulus.



Inueniatur ſectionis axis minor qui ſit B C, & centrum D: ſuperque rectâ B C deſcribatur circuli circumferentiæ portio B E C dati Z anguli capax, quæ ſectioni occurrat in E: iunctâque BE & bifariam ſectâ in G, iungatur D G, & ad ſectionem producatur in H: erit igitur DH ſectionis diameter. Dico diametrum D H problemati ſatisfacere.

Iungatur enim C E. Igitur, quoniam B E bifariam ſecta eſt in G, erit vtraque B G, E G ad D G diametrum ordinatim applicata. Sed & B C bifariam ſecta eſt in D: erit igitur rectæ CE recta DG æquidiſtans: ideoque & angulus B G D angulo B E C, hoc eſt dato Z angulo æqualis. Quare & diameter D G, hoc eſt D H, problemati ſatisfacit. Inuenta igitur eſt vniuersè ſectionis cuiuſlibet diameter ad quam ordinatæ in dato angulo applicentur. Quod erat propoſitum.

Sed & ſi datâ hyperbolâ, aut ellipſi, exhibeatur diameter quæcunque ad quam ordinatæ ſub majori acuto angulo quam ſit datus Z acutus etiam angulus applicentur: vel etiam ſub minori obtuſo, ſi datus Z ſit obtuſus; eadem ratione ex ipſa exhibita, veluti ex inuento iam vtriuſque ſectionis axe, quæſita diameter inuenietur problemati ſatisfaciens.

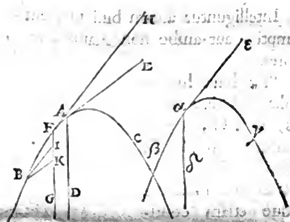
Digitized by Google

THEOR. XXXIX. PROP. LXVIII.

Si binarum parabolarum parametri ſint inuicem æquales, non ſint autem ſub æqualibus vtrobique angulis ad contiguas diametros applicatæ; non erit altera alteri parabola eadem.

Oportet autem, vt bini inuicem comparati anguli ſint, ſigillatim ſumpti, aut ambo non maiores recto, aut ambo recto non minores.

Sint binæ parabolæ BAC, βαγ, earum diametri AD, αδ, & contiguæ parametri AE, αε: ſitque αε æqualis AE, ſed angulus δαε minor angulo DAE, quorum neuter ſit recto minor. Dico parabolam βαγ parabolæ BAC non eſſe eandem.



Si enim fieri poteſt, ſit altera alteri eadem. Quoniam angulus DAE minor eſt angulo δαε, & neuter recto minor eſt, inueniatur, per anteced. in parabola BAC diameter FG ad quam ordinatim ductæ in dato δαε angulo applicentur: ducaturque, per 56 primi huius, eidem contigua parameter FH. Erit igitur GFH angulus angulo δαε æqualis: ideoque &, ex 10 huius, parameter FH parametro αε, hoc eſt ipſi AE, erit æqualis. Sumpto autem in ſectione BAC quolibet puncto B, ducantur ad vtramlibet FG aut AD diametrum BI quidem æquidiſtans FH, & BK æquidiſtans AE. Quoniam igitur BKI angulus, hoc eſt DAE, recto non eſt minor, & eſt angulus BIF, hoc eſt GFH, ipſo DAE angulo maior, erit BIF angulus obtuſus: ideoque & BIK angulus acutus minor erit angulo BKI. Recta igitur BI maior erit quàm BK, quare & BI quadratum quadrato BK maius erit. Sed vt BI quadratum ad BK quadratum, ita eſt, ex 62 huius, FH parameter ad parametrum AE: igitur & parameter FH maior erit parametro AE. Sed iam oſtenſæ ſunt inuicem æquales: igitur & æquales erunt inuicem & inæquales. Quod eſt abſurdum.

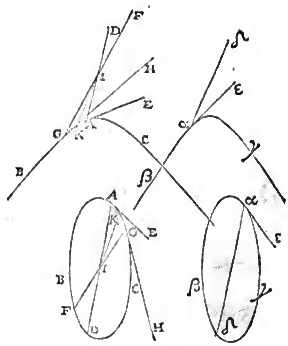
Eademque ratione, ſi angulus DAE maior ſit angulo δαε, & neuter ſit recto maior, idem abſurdum concludetur. Quare parabola βαγ parabolæ BAC eadem non erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XL. PROP. LXIX.

Si binæ hyperbolæ, vel binę ellipſes, tranſuerſas diametros inuicem æquales habeant, & contiguas parametros etiam inuicem ęquales: non ſint autem æquales anguli qui vtrobique tranſuerſa diametro & contigua parametro continentur; non erit altera alteri hyperbola, aut ellipſis, eadem.

Intelliguntur autem bini inuicem comparati anguli, ſigillatim ſumpti, aut ambo non maiores recto, aut ambo recto non minores.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, βαγ, quarum tranſuerſæ diametri AD, αδ ſint æquales inuicem, atque etiam contiguæ parametri AE, αε inuicem æquales: ſit autem angulus DAE maior angulo δαε, quorum neuter ſit recto maior. Dico hyperbolam, vel ellipſim, βαγ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC non eſſe eandem.



Si enim fieri poteſt, ſit altera alteri eadem. Quoniam autem angulus DAE maior eſt angulo δαε, & neuter ipſorum recto maior, inueniatur, per 67 huius, in hyperbola, vel ellipſi, BAC tranſuerſa diameter FG ad quam, vbi opus, productam, ordinatim à ſectione ductæ in dato δαε angulo applicentur: ducaturq; per 55 primi huius, ſectionem contingens GH: ſitq; ſectionis BAC centrum I. Erit igitur angulus FGH angulo δαε æqualis: ideoque &, ex 10 huius, erunt tam tranſuerſæ FG, δα diametri inuicem, quam eiſdem contiguæ parametri inuicem æquales: quare & FG erit ęqualis DA, atque etiam IG æqualis IA. Quod in hyperbola abſurdum eſſe conſtat. Sed iunctâ inſuper GA & bifariam ſectâ in K, erit ducta IK ad ipſam AG perpendicularis, ideoq; & ſectionis

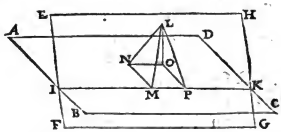
Digitized by Google

ſectionis axis, & vtraque AK, GK ad ipſum ordinatim applicata: vtraq; igitur AE, GH contingens, vbi opus producta, axi IK, etiam vbi opus producto, occurret in vno eodemq; puncto, hoc enim ex 23 primi huius ſequetur neceſſario: ideoq; & è duobus IA, IG ſemidiametris, duabuſq; AE, HG contingentibus ad concurſum ſumptis, fiet quadrilaterum cuius oppoſiti ad A & G anguli erunt inuicem æquales. Quod in vtraq; ſectione eſt abſurdum. Cum enim ſint IAE, IGH anguli inæquales, & neuter recto maior, qui eorum alterutrius ſumetur deinceps recto non minor erit: quare & reliquo maior ſit omnino neceſſe eſt.

Similiter &, ſi angulus DAE minor ſit angulo δαε, & neuter recto minor, idem abſurdum concludetur. Quare propoſitarum ſectionum altera alteri eadem non erit. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA. XV. PROP. LXX.

Si bina plana ſe inuicem non ad rectos ſecent angulos; quæ ab aliquo in eorum alterutro puncto ad communem amborum ſectionem recta ducetur linea, cum contermina recta in altero plano educta ad eandem communem ſectionem perpendiculari rectos non conſtituet angulos.



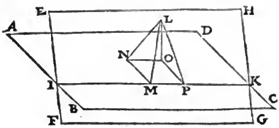
Sint bina plana ABCD, EFGH inuicem inclinata, eorumq; ſit communis ſectio recta IK: quolibet autem in eorum alterutro, vt in plano EFGH, ſumpto puncto L, ducatur ad IK recta quæcunque LM: ſitque MN in plano ABCD ducta perpendicularis ad IK. Dico angulum LMN non eſſe rectum.

Sit enim 1° LM perpendicularis ad IK. Palam igitur eſt quod eadem erit rectæ LM ad rectam MN inclinatio quæ plani EFGH ad planum ABCD: quare non erit LM ad MN perpendicularis, ideoq; nec angulus LMN rectus.

Non ſit autem LM perpendicularis ad IK. Quoniam autem planum EFGH, plano ABCD eſt inclinatum, quæ à puncto L ad planum ABCD ducetur perpendicularis, communi amborum ſectioni, ſcilicet rectæ IK, non occurret. Occurrat igitur eidem ABCD plano in puncto O: ducanturque ON æquidiſtans IK, & OP æquidiſtans MN: iungaturque LN. Quoniam igitur puncta N, O, P ſunt in plano ABCD, & ad ipſum

Digitized by Google

ABCD planum perpendicularis eſt LO, erit planum per L,O,N plano per N,O,P, hoc eſt ABCD plano rectum. Propter æquidiſtantes autem NO, MP, & angulum NMP rectum, erit MN ad NO perpendicularis, ideoque & ad NL ipſam in eodem NOL plano contingentem: rectus igitur erit LNM angulus. Quare

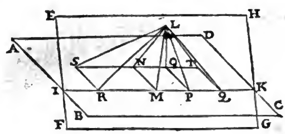


erit angulus LMN recto minor, ideoque non rectus. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA. XVI. PROP. LXXI.

Iiſdem manentibus, ſi ab eodem præaſſumpto puncto ad eandem communem planorum ſectionem plures rectę agantur; quæ ipſarum maior erit, maiorem cum contermina in altero plano ducta perpendiculari efficiet angulum: & binæ inuicem æquales æquales conſtituent angulos.

Sint eadem quæ in antecedente: ducanturque LR, LQ: & ſit LR maior quàm LM, & LQ ipſi LM æqualis: ſintque ad RQ perpendiculares RS, QT. Dico angulum LRS angulo LMN eſſe maiorem: & angulum LQT ipſi LMN eſſe æqualem.

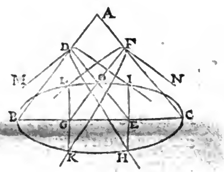


Productæ ON occurrant RS quidem in S, & QT in T: iunganturque LS, LT. Erit igitur vterque LSR, LTQ angulus rectus, veluti & rectus in antecedente oſtenſus eſt LNM angulus: & propter ęquales RS, MN, maior erit ratio LR ad RS, quàm LM ad MN: ideoque & LRS angulus angulo LMN maior erit. Sed & propter æquales LM, LQ, atque etiam MN, QT, & vtrumque ad N & T angulum rectum, erunt triangula LNM, LTQ æqualia & ſimilia: angulus igitur LQT angulo LMN erit æqualis. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

THEOR. XLIV. PROP. LXXII.

Si conus ſcalenus plano ſectus per axem non ad rectos baſi angulos, rurſus ſecetur duobus non ęquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas parabolas: ſintq; communes cum baſe coni ſectiones ad baſim trianguli per axem perpendiculares: atque etiam rectæ vtriuſq; ſectionis & eiuſdem trianguli vertice interceptę æquales inuicem; ſi quidem triangulum iſoſceles eſt, erit binarum eiuſmodi parabolarum altera alteri eadem: at ſi ſcalenum eſt, non erit altera alteri ſectio eadem.

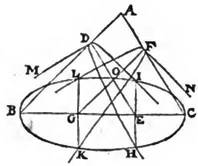


Sit conus ABC ſcalenus per axem ſectus plano faciente triangulum BAC ad baſim coni inclinatum, qui rurſus ſecetur, ſecundùm lineas HI, KL in baſe coni ad BC baſim trianguli BAC perpendiculares, duobus planis formantibus in ſuperficie binas HDI, KFL parabolas, quarum ſint diametri DE, FG inuicem occurrentes in O, & trianguli cruribus AB, AC, illa in D, hæc in F: ſintq; rectæ AD, AF æquales inuicem. Dico ſi quidem BAC triangulum iſoſceles eſt, parabolam KFL parabolæ HDI eſſe eandem: & ſi ſcalenum, non eſſe alteram alteri eandem.

Sint enim ſectionum parametri DM, FN ipſis DE, FG diametris contiguæ. Quoniam igitur vt BAC rectangulum ad BC quadratum, ita eſt, ex 12 primi huius, AD ad DM, & ita AF ad FN, erit FN parameter parametro DM æqualis. Sit itaq; iam triangulum BAC iſoſceles. Quoniam & DE æquidiſtat AC, & FG æquidiſtat AB, erit angulus OGE angulo OEG æqualis, & recta OG rectæ OE: quare, propter vtramque HE, KG perpendicularem ad BC, erit, ex anteced. angulus OGK, hoc eſt FGK, angulo OEH ſiue DEH æqualis. Et ſunt HI, KL bifariam ſectę, illa in E, hæc in G: ideoque & vtraque HE, KG ad contiguam diametrum ordinatim applicata: quare & ſub æqualibus vtrobique angulis parameter contiguæ diametro applicabitur: ideoque & angulus GFN angulo EDM erit æqualis. Igitur, ex 8 huius, erit KFL parabola parabolæ HDI eadem. Quod 1° erat demonſtrandum.

Sit iam BAC triangulum ſcalenum, & ſit AB maior quàm

AC. Erit igitur OG maior quàm OE: & propter perpendiculares ad GE rectas HE, KG, erit, ex antecedente, angulus FGK maior angulo DEH. Et quoniam vtraque HE, KG ordinatim eſt applicata, illa ad DE diametrum, hæc ad diametrum FG; ſub inæqualibus angulis parametri FN, DM contiguis FG, DE, diametris applicabuntur. Suntq; oſtenſę FN, DM parametri inuicem æquales: igitur, ex 68 huius, parabola KFL parabolæ HDI eadem non erit. Quod erat 2° demonſtrandum.



THEOR. XLV. PROP. LXXIII.

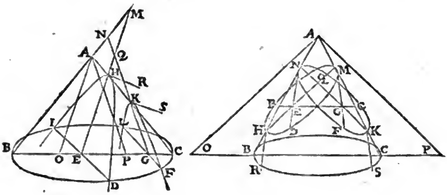
Si conus ſcalenus plano per axem ſectus non ad rectos baſi angulos rurſus duobus planis ſecetur quę faciant communes cum baſe, aut ipſi ęquidiſtante plano, ſectiones ad trianguli per axem facti baſim, aut ad ipſi æquidiſtantem, perpendiculares: & tranſuerſæ ſectionum in ſuperficie factarum diametri æquales ſint, & ſubcontrariè inuicem poſitæ, ſiue ad externum verticalem trianguli per axem angulum, ſi ſint hyperbolæ, ſiue ad internum, ſi ſint ellipſes; ſi quidem triangulum per axem iſoſceles eſt, erit factarum eiuſmodi binarum hyperbolarum, aut ellipſium, altera alteri eadem: at ſi triangulum per axem iſoſceles non eſt, neque dictarum ſectionum altera alteri eadem erit.

Sit conus ABC ſcalenus per axem ſectus plano faciente triangulum BAC ad baſim coni inclinatum, qui rurſus duobus planis ſecetur ſecundùm lineas DE, FG ad BC baſim trianguli, aut ad ipſi æquidiſtantem, perpendiculares: & ſint formatæ in ſuperficie coni binę DHI, FKL ſectiones, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſes, quarum tranſuerſæ diametri ſint NM, KN, quæ & ęquales ſint, & ſubcontrariè inuicem poſitę ad A verticalem trianguli BAC angulum. Dico ſi quidem ABC triangulum iſoſceles eſt, hyperbolam, vel ellipſim, FKL hyperbolæ, vel ellipſi, DHI eſſe eandem: & ſi ſcalenum eſt, non eſſe alteram alteri ſectionem eandem.

Ducantur

Digitized by Google

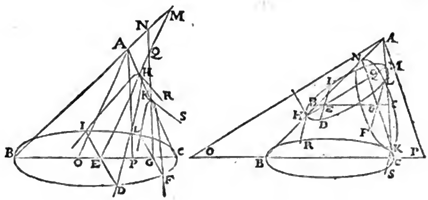
Ducantur à vertice trianguli BAC ad eiuſdem baſim BC, vbi



opus productam, ipſis HM, KN tranſuerſis diametris æquidiſtantes AO, AP: ſintq; eiſdem contiguæ parametri HR, KS: & in quo HM, KN inuicem ſe ſecant, ſit punctum Q. Igitur quoniam vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita eſt HM ad HR: & vt AP quadratum ad BPC rectangulum, ita eſt KN ad KS: atque, propter æquales ad K & M angulos, ideoq; & triangula AKN, AHM ſimilia, vt AO quadratum ad BOC rectangulum, ita, ex 11 huius, eſt AP quadratum ad BPC rectangulum; vt HM ad HR, ita erit KN ad KS. Et ſunt tranſuerſæ HM, KN diametri inuicem æquales: igitur & æquales erunt inuicem ipſis contiguę HR, KS parametri. Sit itaque ABC triangulum primùm iſoſceles. Igitur propter æquales ad B & C angulos, erit angulus AOP, hoc eſt QEG, angulo APO ſiue QGE æqualis, ideoq; & recta QG rectæ QE æqualis: & propter vtramque DE, FG perpendicularem ad BC, erit, ex 71 huius, angulus QGF, hoc eſt KGF, angulo QED ſiue HED æqualis. Suntque DE, FG ordinatim ad HE, KG diametros applicatæ, quoniam & vtraque DI, FL bifariam eſt ſecta, illa in E, hæc in G: igitur ſub æqualibus vtrobique angulis parameter contiguæ tranſuerſæ diametro applicabitur. Et ſunt tranſuerſæ HM, KN diametri æquales inuicem, & ipſis contiguæ HR, KS parametri oſtenſæ etiam inuicem æquales: igitur, ex 9 huius, erit hyperbola, vel ellipſis, FKL hyperbolæ, vel ellipſi, DHI eadem. Quod 1° erat demonſtrandum.

Sit nunc BAC triangulum ſcalenum, & ſit AB maior quàm BC. Igitur & maior erit ACB angulus angulo ABC, &, in 1ª quidem figura, propter æquales CAP, BAO angulos, erit reliquus AOB, hoc eſt QEB, angulus reliquo APC ſiue QGC angulo maior: ideoque & QEG angulus angulo QGE minor erit. In 2ª autem figura, propter externum ACP angulum externo ABO minorem, & verticales CAP, BAO angulos ęquales, erit reliquus AOB, hoc eſt QEG, angulus reliquo

APC ſiue QGE angulo minor. Quare ad vtramlibet ſectionem erit recta QE maior quàm QG: ideoque &, propter vtrumque



QGF, QED angulum, ex 70 huius, obliquum, & perpendicularem ad EG vtramque DE, FG, erit, ex 71 huius, angulus QED maior angulo QGF. Suntque DE, FG ordinatim applicatę: igitur ſub inęqualibus vtrobique angulis ad tranſuerſas HM, KN diametros applicabuntur contiguæ HR, KS parametri. Suntq; oſtenſæ HR, KS, veluti & HM, KN, inuicem æquales: igitur, ex 69 huius, non erit hyperbola, vel ellipſis, FKL hyperbolę, vel ellipſi, DHI eadem. Quod 20 erat demonſtrandum.

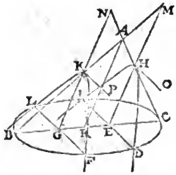
MONITVM.

Sed & altera de binis hyperbolis in coni ſuperficie à binis æquidiſtantibus planis ad diuerſas verticis partes ſectis, ideoque & idem trianguli per axem crus vertice non contingentibus, etiamnum nobis occurrit ſilentio non prætermittenda concluſio, quæ in ſingulari vtroq; & recto & ſcaleno cono, & in binis oppoſitis vera elucet, quanquam omnino contraria ei quam, in 21 huius, de binis hyperbolis à duobus æquidiſtantibus planis ad eaſdem verticis coni partes ſectis, ideoque & in eodem trianguli per axem crure vertices habentibus, iam demonſtrauimus. Quoniam autem ea de qua iam agimus in ſingulari ſcaleno cono plano per axem non ad rectos baſi angulos ſecto magis dubia videri poterat, ideo & in ſingulari ſcaleno tantùm ipſam tibi proponimus: in binis autem oppoſitis facilè tibi conſpicuam efficiet propoſitio noſtra 14 huius: & pro ſingulari recto eadem erit demonſtratio quæ prioris caſus proximè ſequentis propoſitionis. Apponet igitur & inſtitutæ ſpeculationi metam, & huic tertio libro finem, conceptum ad eandem theorema huiuſmodi.

Digitized by Google

THEOR. XLVI. PROP. LXXIV.

Si conus ſcalenus plano per axem quomodocunque ſectus rurſus ſecetur ſecundùm binas in eiuſdem baſe rectas ad baſim trianguli per axem perpendiculares, duobus ęquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas hyperbolas, quarum tranſuerſæ diametri ſint æquales inuicem; erit factarum huiuſmodi hyperbolarum altera alteri eadem.



Sit conus ABC ſcalenus, vtcunq; per axem ſectus plano faciente triangulum BAC, qui rurſus ſecetur ſecundùm lineas DE, FG, quæ in baſe coni ſint ad BC baſim trianguli BAC perpendiculares, duobus æquidiſtantibus planis formantibus in ſuperficie binas DHI, FKL hyperbolas, quarum tranſuerſæ diametri ſint HM, KN inuicem ęquales. Dico hyperbolam FKL hyperbolę DHI eſſe eandem.

Sint enim ſectionum parametri HO, KP ipſis HM, KN tranſuerſis diametris contiguæ. Quoniam igitur bina per HDI & FKL plana inuicem æquidiſtant, erunt communes ipſorum cum triangulo BAC ſectiones, ſcilicet rectæ HE, KG ſectionum diametri, æquidiſtantes inuicem: quare, ducta ipſis æquidiſtante AR, vt AR quadratum ad BRC rectangulum, ita erit HM ad HO, & ita KN ad KP. Et ſunt HM, KN inuicem æquales: igitur & æquales inuicem erunt ipſis contiguę HO, KP parametri. Si quidem igitur triangulum BAC ad BDC baſim coni rectum eſt; erit & rectus vterque HED, KGF angulus. Sed & vtraque DE, FG ordinatim eſt applicata: quarę & vtraque HM, KN tranſverſus erit axis, & vtraq; HO, KP recta erit parameter: ideoque &, ex 9 huius, erit altera alteri ſectio eadem. At ſi triangulum BAC ad baſim BDC eſt inclinatum; quoniam binæ KG, GF rectæ ſeſe contingentes binis ſeſe contingentibus rectis HE, ED æquidiſtant, æqualem continebunt KGF angulum angulo HED. Quare rurſus ſub æqualibus vtrobique angulis parametri HO, KP ad contiguas tranſuerſas HM, KN diametros applicabuntur: ideoque &, ex eadem 9 huius, erit altera alteri hyperbola eadem. Quod erat demonſtrandum.

TERTII LIBRI FINIS.

Digitized by Google

Ad quartum Conicorum librum.

MONITVM.

Præmiſſa de iiſdem inuicem coni ſectionibus tractationi ordine & natura conſequens iam occurrit de ſimilibus coni ſectionibus inſtituenda diſquiſitio, alter ſcilicet de eiuſdem nominis coni ſectionum inuicem comparatione liber, qui, vt prioris erit quaſi ſupplementum, ita & ad experimentorum phyſicorum imitationem maximo vtique poterit eſſe ſubſidio. Siquidem varias fugacis nimiùm radij optata veſtigia, ſi non ipſa eadem, ſaltem ſimilia reſtituendi & imitandi rationes plerumque notabit etiam & ſuggeret, dum propoſitæ cuicunque coni ſectioni alteram primùm exhibebit ſimilem ſectionem, aut diſcriminis rationem docebit: & deinde cuicunque etiam propoſitæ quæſitam in coni ſuperficie ſimilem alteram exhibendi methodum aperiet. Quare non te pigeat, Lector qui horum es ſtudioſus, Prodromo noſtro ad huiuſce agri luſtrationem diuertenti interim adhæreſcere aliquandiu, quò ad eiuſdem culturam fias inſtructior & paratior. Neque enim omnino ſuis caret ſentibus, quanquam paucis aſper, & Prodromi veſtigijs iam preſſus & complanatus, ideoque tibi facilè & abſque vlla impeditione decurrendus videbitur. Memoratur hic idem ager ab Apollonio magno illo geometra olim excultus, ſed in ipſum plus æquo liberalis fuit Apollonius: ſiquidem ampliores iuſto fines eidem conſtituiſſe teſtatur Apolloniana definitio ab Eutocio ad Archimedis Ισόρροπα *relata. Ipſos contraxit Prodromus noſter, & ad iuſtos definitionis terminos coërcuit, nullo gloriæ aut ambitionis zelo ductus, ſed ſolo veritatis indagandæ & aſſerendæ ſtudio excitatus. Tu, quum occurret, de vtroque iudicium inſtitues & pronuntiabis.*

Digitized by Google

CLAVDII MYDORGII
PATRICII PARISINI
CONICORVM
LIBER QVARTVS.

De eiuſdem nominis Coni-ſectionum inuicem comparatione, poſterior.

SIVE

De Similibus Coni-ſectionibus.

DEFINITIONES.

I.

SIMILES Diametrorum portiones dicimus; quæ vtrobique à vertice ſumptæ, & eodem ordine, in ijſdem rationibus ſunt ad inuicem.

II.

Similes Coni-ſectiones dicimus, in quibus ſimiles omnes ſimilium diametrorum portiones vtrobique in ijſdem ſunt rationibus ad conterminas rectas à ſectione ordinatim applicatas.

Digitized by Google

MONITVM.

Tua & veritatis maximè intereſt, lector φιλαλήθης, de noua hac noſtra ſimilium coni ſectionum definitione nonnihil hìc admoneri. Quandoquidem ſi ipſam cum Apolloniana ſimilium conicarum linearum definitione compares, qualem nobis ad Archimedis Æqueponderantia tranſmiſit Eutocius Aſcalonita, & ipſe aui veteris geometra non ignobilis, de alterutra tibi haud dubiè occurret ſuſpicari. Quò igitur noſtra, proprijs ſcilicet & ipſiuſmet Apollonij fundamentis innixa, tibi ſola probetur, & meritò amplectenda dignoſcatur; per te nobis hìc liceat in Apollonianam & aliorum definitiones aliquantùm digredi.

Retulit igitur Eutocius in 3. ſecundi Æqueponderantium Archimedis, Similes Coni ſectionum portiones ſic definiuiſſe Apollonium, in 6 Conicorum, Cum in ipſarum ſingulis ductis baſi æquidiſtantibus numero æqualibus, æquidiſtantes & baſes ſunt ab abſciſſas à verticibus diametrorum portiones in iiſdem rationibus, & abſciſſæ ad abſciſſas. Et addidiſſe, Parabolas omnes inuicem eſſe ſimiles.

Quam autem conicis lineis, ſiue coni-ſectionum portionibus, aptauit definitionem Apollonius, eandem & ipſis coni-ſectionibus æquo iure aptaueris, ſi pro æquidiſtantibus baſi (quod, in Conicis, de ſpatio recta linea & coni ſectione concluſo tantùm dici meruit) æquidiſtantes cuipiam ordinatim ad diametrum applicatæ, reponas.

Commandinus autem Vrbinas inſignis, quanquam recentioris aui, geometra, cuique de reſtitutis & publicatis veterum geometrarum dignioribus monumentis tota Matheſis æternùm ſe debitricem agnoſcet, poſtquam, ab Eutocio mutuatus, abſque vlla demonſtratione præmiſit parabolas omnes eſſe ſimiles, ſubiunxit hyperbolas & ellipſes ſimiles eas eſſe, quarum coniunctæ diametri inter ſe, vel quarum figuræ latera eandem habent proportionem.

Poſtremus demum Dauid Riualtus à Flurantia Archimedis operum interpres, vel, ſi mauis, paraphraſtes, Eutocio & Commandino facilè ſubſcribens, quum ad Archimedis Conoidea &

Digitized by Google

Sphæroidea Apollonianam Eutocij & binas Commandini ſimilium hyperbolarum aut ellipſium definitiones examini ſubiecit; in id totus, ſed nimius, incubuit, vt omnes rectè habere oſtenderet. Qui, cum ipſas inter ſe ita bellè conuenire ibidem concludat, & geometricè ſe demonſtraſſe præſumat, vt poſitâ alterutrâ neceſſariò ſequatur altera; auctor fuit nobis in idipſum accuratiùs inquirendi: vnde tandem nobis innotuit Riualtum infœlicem admodum geometram, & muneri ſuſcepto imparem, pro inſtituto examine non lucem aut demonſtrationem geometricam eiuſmodi definitionibus attuliſſe, ſed meras nugas & tenebras offudiſſe, atque ita de ſuis reliquis ad Archimedem notis cautiùs legendis tacitè nos ſubmonuiſſe.

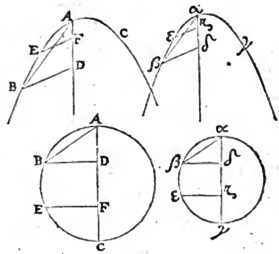
Quare, & huius loci, & ſuſceptæ rei ratio à nobis iam videri poſſit exigere, vt eaſdem etiam definitiones ad æquiorem trutinam, & caſtigatius paulò examen hìc reuocemus: nè à magnis nominibus (Apollonium dico & Commandinum) præiudicium fiat diutiùs veritati. Quoniam autem pleraq; priùs neceſſariò adſtruenda veniunt, quæ hic liber ſibi propria iam vindicauit, & tibi oportunè proponenda in ordinem conuenientiorem diſtribuit, poſt quæ nullum tibi de præmiſſa noſtra definitione dubium ſit remanſurum; ſatis fore hìc duximus, de reliquis, Apollonianâ ſcilicet vnâ, & binis Commandini, interim te monuiſſe, ipſas nempe vitioſas eſſe & mancas, vt quæ ſimilium coni ſectionum, aut portionum ſimilium, proprietates potiùs dici debeant, & accidentia, quàm definitiones. Quamuis enim ſimilibus quibuſlibet ſectionibus, aut earum portionibus ſimilibus, conueniant, ideo conuenire dicimus, quoniam ſimiles ponuntur ſectiones aut portiones: at non ſimiles ideo dicentur, quòd definitiones eiuſmodi ipſis omnino conueniant, cum & diſſimilibus aptè etiam conuenire poſſint, vt ſuo tibi adnotatum occurret loco. Quemadmodum & ſimilibus quibuſlibet rectilineis figuris contingit latera circa reſpondentes angulos habere proportionalia, & in iiſdem vtrobique ad inuicem rationibus: at non ideo ſimiles erunt figuræ, quæcunq; latera in iiſdem ad inuicem rationibus vtrobiq; habebunt. Atqui niſi cum definito conuertatur definitio, vitioſa eſt. Itaq; & de his iam non plura hìc inculcabimus, ad vtiliora properantes.

Digitized by Google

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Omnes parabolæ inuicem, veluti & circulorum circumferentiæ omnes inuicem, ſimiles ſunt.

Sint binæ parabolæ, vel binæ circulorum circumferentiæ, B A C, $\beta\alpha\gamma$. Dico parabolam, vel circuli circumferentiam, $\beta\alpha\gamma$ parabolæ, vel circuli circumferentiæ, BAC eſſe ſimilem.



Sit enim parabolæ BAC diameter quæcumq; AD, & ad ipſam ordinatim ſint applicatæ B D, EF: iunctâque A B, inueniatur in parabola $\beta\alpha\gamma$ diameter $\alpha\delta$ ad quam ordinatim ductæ in dato A D B angulo applicentur: fiatq; $\delta\alpha\beta$ angulus angulo DAB æqualis, occurratq; recta $\alpha\beta$ ſectioni in β: ordinatimque applicatâ $\beta\delta$, vt AD ad AF, ita fiat $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: ducaturque $\zeta\epsilon$ æquidiſtans $\beta\delta$, quæ & a ſectione ad diametrum $\alpha\delta$ ordinatim erit applicata. Quoniam igitur vt $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$, hoc eſt vt AD ad AF, ita eſt $\beta\delta$ quadratum ad $\epsilon\zeta$ quadratum: & ita BD quadratum ad EF quadratum; vt BD quadratum ad EF quadratum, ita erit $\beta\delta$ quadratum ad $\epsilon\zeta$ quadratum: & vt BD ad EF, ita erit $\beta\delta$ ad $\epsilon\zeta$. Sed vt BD ad DA, ita, propter ſimilia BDA, $\beta\delta\alpha$ triangula, eſt $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$: & vt DA ad AF, ita eſt $\delta\alpha$ ad $\alpha\zeta$: igitur, ex æquali, vt EF ad FA, ita etiam erit $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$. Sed & ſimiliter omnes rectę vtrobique a ſectione ad diametrum ordinatim ductæ oſtendentur in iiſdem rationibus ad conterminas ſimiles diametri portiones: & ſunt expoſitæ AD, $\alpha\delta$ diametri ſimiles: igitur, ex definit. parabola $\beta\alpha\gamma$ parabolæ BAC ſimilis erit. In binis autem circulorum circumferentijs quod propoſitum eſt ſic demonſtrabitur. Ductis à circumferentia BAC ad eiuſdem diametrum AC binis perpendicularibus BD, EF: iunctâque AB, fiat in circumferentia $\beta\alpha\gamma$ ad $\alpha\gamma$ diametrum angulus $\gamma\alpha\beta$ angulo CAB æqualis: ductâque perpendiculari $\beta\delta$, vt AD

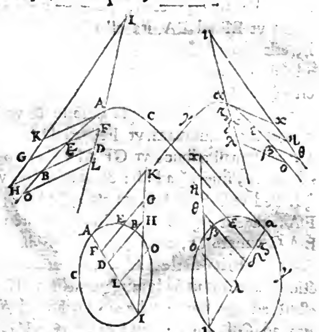
ad AF,

Digitized by Google

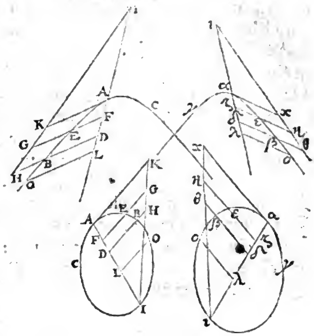
ad AF, ita fiat $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: erigaturque perpendicularis $\zeta\epsilon$. Quoniam igitur vt AD ad DB, & DB ad DC, ita eſt $\alpha\delta$ ad $\delta\beta$ & $\delta\beta$ ad $\delta\gamma$, ideoque, ex æquali, vt AD ad DC, ita eſt $\alpha\delta$, ad $\delta\gamma$; erit, componendo, vt AD ad AC, ita $\alpha\delta$ ad $\alpha\gamma$. Sed vt AD ad AF, ita eſt $\alpha\delta$ ad $\alpha\zeta$: igitur, ex æquali, vt AF ad AC, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\alpha\gamma$: &, diuidendo, vt AF ad FC, hoc eſt vt AF quadratum ad AFC rectangulum, ſiue FE quadratum, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\zeta\gamma$, hoc eſt ita $\alpha\zeta$ quadratum ad $\alpha\zeta\gamma$ rectangulum, ſiue $\zeta\epsilon$ quadratum. Quare vt AF ad FE, ita etiam erit $\alpha\zeta$ ad $\zeta\epsilon$. Eademq; ratione perpendiculares omnes vtrobique ductæ in iiſdem oſtendentur rationibus ad conterminas ſimiles diametri portiones: & ſunt in circulis diametri omnes ſimiles: igitur &, ex definit. circuli circumferentia $\beta\alpha\gamma$ circuli BAC circumferentiæ ſimilis erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. II. PROP. II.

Si ſint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, & vtrobique à ſectione ad expoſitam diametrum binæ rectæ ordinatim ſint applicatæ: ſit autem ordinatim applicatarum ad inuicem, & ad conterminas diametri portiones à vertice abſciſſas eadem vtrobique ratio: atque etiam anguli vnius applicatis & diametro contenti angulis alterius applicatis & diametro contentis ſint æquales; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, earumque diametri AD, $\alpha\delta$, vertices A & α: ſintque à ſectione BAC ad AD diametrum ordinatim applicatæ BD, EF: & à ſectione $\beta\alpha\gamma$ ad $\alpha\delta$ diametrum ordinatim applicatæ $\beta\delta$, $\epsilon\zeta$: vt autem BD ad EF, ita ſit $\beta\delta$ ad $\epsilon\zeta$: & vt BD ad DA, ita ſit $\beta\delta$ ad $\delta\alpha$, vtq; EF ad FA, ita etiam ſit $\epsilon\zeta$ ad $\zeta\alpha$: ſitque angulus $\beta\delta\alpha$ æqualis angulo BDA. Dico hyperbolam, vel ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC eſſe ſimilem.

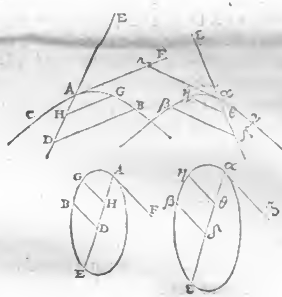


Singulis BD, EF quadratis ſingula ponantur æqualia ADH, AFG rectangula: iunctaque HG & producta diametro AD, vbi opus productæ, occurrat in I, & rectæ AK æquidiſtanti BD in K: ſimiliter & ſingulis βδ, εζ quadratis ſingula æqualia ſint αδθ, αζη rectangula: iunctaque θη & producta diametro αδ, productæ vbi opus, occurrat in ι: ducaturq; ακ æquidiſtans βδ. Quoniam igitur vt KA ad AI, ita eſt GF ad FI, & HD ad DI, atq; ita GFA rectangulum, hoc eſt EF quadratum, ad IFA rectangulum, & ita HDA rectangulum, ſiue BD quadratum, ad IDA rectangulum; erit IA tranſuerſa hyperbolæ, vel ellipſeos, BAC diameter, eiuſdemque contigua parameter AK, hoc enim patet ex Corollario 2. ad 13. primi huius. Similiter & ια tranſuerſa hyperbolæ, vel ellipſeos, βαγ diameter oſtendetur, & ακ eiuſdem contigua parameter. Quoniam autem vt BD ad EF, ita eſt βδ ad εζ: & vt BD ad DA, ita eſt βδ ad δα: atque etiam vt EF ad FA, ita eſt εζ ad ζα; vt DA ad FA, ita ex æquali, erit δα ad ζα: &, diuidendo, vt DF ad FA, ita erit δζ ad ζα. Rurſus, quoniam vt EF ad FA, hoc eſt vt GF ad EF, ita eſt εζ ad ζα, ſiue ηζ ad εζ, ex æquali etiam, vt GF ad FA, ita erit ηζ ad ζα. Eademque ratione & vt HD ad DA, ita erit θδ ad δα. Et quoniam vt FA ad DA, ita oſtenſum eſt eſſe ζα ad δα; ex æquali adhuc, vt GF ad HD, hoc eſt vt IF ad ID, ita erit ηζ ad θδ, ſiue ιζ ad ιδ: & diuidendo, vt IF ad FD, ita erit ιζ ad ζδ. Sed vt DF ad FA, ita eſt δζ ad ζα: igitur, ex æquali, vt IF ad FA, ita erit ιζ ad ζα. Sumpto autem alio quolibet in ſectione BAC puncto O, ordinatim ad AF diametrum ducatur OL: & vt AF ad AL, ita fiat αζ ad αλ: ducaturque λο æquidiſtans βδ, quæ ſectioni occurrat in ο. Igitur quoniam vt IF ad FG, ſiue IA ad AK, ita eſt ιζ ad ζη, ſiue ια ad ακ: vtq; IA ad AK, ita eſt ILA rectangulum ad OL quadratum: & vt ια ad ακ, ita eſt ιλα rectangulum ad ολ quadratum; vt ILA rectangulum ad LO quadratum, ita erit ιλα rectangulum ad λο quadratum. Sed, quoniam vt AF ad AL, ita eſt αζ ad αλ: vtque IF ad AF, ita eſt ιζ ad αζ: & in hyperbo-

lis diuidendo, vel & in ellipſibus componendo, vt IA ad AF, ita eſt ια ad αζ: &, ex æquali, vt IA ad AL, ita eſt ια ad αλ; rurſuſque, in illis, componendo, vel, in his, diuidendo, vt IL ad LA, hoc eſt vt ILA rectangulum ad LA quadratum, ita eſt ιλ ad λα, ſiue ita ιλα rectangulum ad λα quadratum; ex æquali, vt OL quadratum ad LA quadratum, ita erit ολ quadratum ad λα quadratum: ideoque vt OL ad LA, ita etiam erit ολ ad λα. Eademque ratione & omnes aliæ ipſis BD, βδ æquidiſtantes vtrobique à ſectione ad diametrum ductæ oſtendentur in ijſdem rationibus ad conterminas ſimiles diametri portiones: ſuntque expoſitæ AD, αδ diametri ſimiles: igitur, ex definitionibus, hyperbola, aut ellipſis, βαγ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC ſimilis erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. III. PROP. III.

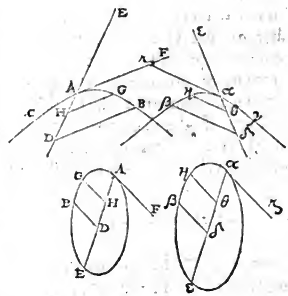
Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, ſimiles ſint; habebunt figurarum ad ſimiles diametros factarum latera inuicem in eadem ratione.



Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, ſimiles BAC, βαγ, earumque ſimiles quælibet diametri AD, αδ, quæ producantur in E & ε, vt ſint tranſuerſæ diametri, AE quidem ſectionis BAC, & αε ſectionis βαγ: ſit autem tranſuerſæ AE diametro contigua parameter AF, & αζ parameter tranſuerſæ diametro αε contigua. Erunt igitur ad ſimiles AD, αδ diametros factæ ſub AE, AF, & αε, αζ figuræ. Dico vt AE ad AF, ita eſſe αε ad αζ.

Sint à ſectione BAC ordinatim ad AD diametrum applicatæ binæ BD, GH rectæ: & vt AD ad AH, ita ſit αδ ad αθ: ordinatimque à ſectione βαγ applicentur βδ, ηθ. Quoniam igitur ſimiles ponuntur BAC, βαγ ſectiones, & ſunt αδ, αθ portiones portionibus AD, AH ſimiles; vt AD ad DB, ita erit αδ ad δβ: & vt AH ad HG, ita erit αθ ad θη. Sed vt AH ad AD, ita eſt αθ ad αδ: igitur, ex æquali, vt BD ad GH, ita etiam erit βδ ad ηθ: & vt BD quadratum ad GH quadra-

tum, hoc eſt vt EDA rectangulum ad EHA rectangulum; ita erit $\beta\delta$ quadratum ad $\eta\theta$ quadratum, ſiue ita $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum ad $\epsilon\theta\alpha$ rectangulum. Rectanguli autem EDA ad rectangulum EHA ratio compoſita eſt ex ratione ED ad EH, & ex ratione AD ad AH: ſimiliter & $\epsilon\delta\alpha$ rectanguli ad $\epsilon\theta\alpha$ rectangulum ratio conſtat ex rationibus $\epsilon\delta$ ad $\epsilon\theta$, & $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$: ablata igitur æquali vtrobique AD ad AH, & $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$ ratione, erit reliquæ ED ad EH ratio eadem reliquæ $\epsilon\delta$ ad $\epsilon\theta$. Quoniam autem vt AD ad AH, ita eſt $\alpha\delta$ ad $\alpha\theta$, &, rationis conuerſione, vt AD ad DH, ita $\alpha\delta$ ad $\delta\theta$; ex æquali, vt AD ad DE, hoc eſt vt AD quadratum ad EDA rectangulum, ita erit $\alpha\delta$ ad $\delta\epsilon$, & ita $\alpha\delta$ quadratum ad $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum. Sed iam vt BD quadratum ad AD quadratum, ita eſt $\beta\delta$ quadratum ad $\alpha\delta$ quadratum: quare ex æquali rurſus vt EDA rectangulum ad BD quadratum, hoc eſt vt AE ad AF, ita erit $\epsilon\delta\alpha$ rectangulum ad $\beta\delta$ quadratum, & ita $\alpha\epsilon$ ad $\alpha\zeta$. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. IV. PROP. IV.

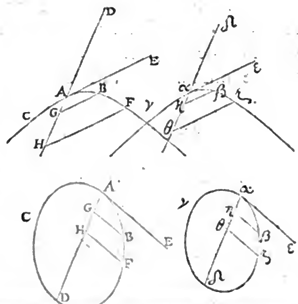
Si in binis hyperbolis, vel binis ellipſibus, ad expoſitas ſimiles tranſuerſas diametros contiguæ parametri eandem vtrobique teneant rationem; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, earumque tranſuerſæ diametri AD, $\alpha\delta$, & contiguæ parametri AE, $\alpha\epsilon$: ſitque $\delta\alpha\epsilon$ angulus angulo DAE æqualis: & vt DA ad AE, ita ſit $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$. Dico hyperbolam, vel ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyberbolæ, vel ellipſi, BAC eſſe ſimilem.

Sumptis in ſectione BAC duobus quibuſlibet B & F punctis, ductiſque ad AD diametrum, productam vbi opus, rectis BG, FH æquidiſtantibus AE, vt DA ad AG, ita fiat $\delta\alpha$ ad $\alpha\eta$: vtque DA ad AH, ita fiat $\delta\alpha$ ad $\alpha\theta$: ductæque $\beta\eta$, $\zeta\theta$, æquidiſtantes

$\alpha\epsilon$,

αε, ſectioni occurrant in β & ζ. Igitur, quoniam vt D A ad A E, ita eſt D G A rectangulum ad B G quadratum, & ita D H A rectangulum ad F H quadratum: vtque δα ad αε, ita eſt δηα rectangulum ad βη quadratum, & ita δθα rectangulum ad ζθ quadratum; vt D G A rectangulum ad B G quadratum, ita erit δηα rectangulum ad βη quadratum: & vt D H A rectangulum ad F H quadratum, ita δθα rectangulum ad ζθ quadratum. Quoniam autem vt D A ad A G, ita eſt δα ad ad αη, componendo, vel diuidendo vbi opus, vt D G ad ad G A, hoc eſt vt D G A rectangulum ad G A quadratum, ita erit δη ad ηα, ſiue ita rectangulum δηα ad quadratum ηα. Quare, ex æquali, vt BG quadratum ad G A quadratum, ita erit βη quadratum ad ηα quadratum; & vt B G ad G A; ita erit βη ad ηα. Eademque ratione oſtenderetur vt FH ad HA, ita eſſe ζθ ad θα. Sed, quoniam vt D A ad A G, & D A ad A H, ita eſt δα ad αη, & δα ad αθ; ex æquali, vt A G ad A H, ita erit αη ad αθ. Vt autem B G ad G A, ita eſt βη ad ηα: & vt F H ad H A, ita eſt ζθ ad θα: igitur, ex æquali rurſus, vt B G ad F H, ita erit βη ad ζθ. Suntque tam βη, ζθ ad αη diametrum ordinatim applicatæ, quàm B G, F H ad diametrum A G: atque inſuper anguli ad η & θ æquales angulis ad G & H: igitur, ex 2. huius, erit hyperbola, vel ellipſis, βαγ hyperbolæ, vel ellipſi, B A C ſimilis. Quod erat demonſtrandum.



COROLL. I.

Itaque, Similes etiam erunt hyperbolæ, vel ellipſes, quarum figuræ ſimiles erunt.

COROLL. II.

Hinc igitur etiam ſequitur, Si binarum hyperbolarum, vel binarum ellipſium, tranſuerſa & ſecunda coniugatæ diametri æqualiter vtrobique inclinentur inuicem, & eandem teneant rationem; alteram alteri ſectionem fore ſimilem.

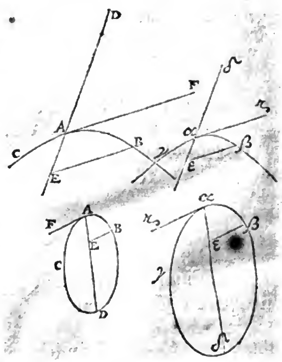
Digitized by Google

COROLL. III.

Sed & illud etiam certò ex proximè oſtenſis conſtat; Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, figurarum ad non ſimiles diametros factarum latera in eadem vtrobique ratione habeant; etiam & ſimiles eiuſmodi diametrorum portiones ad conterminas ordinatim à ſectione applicatas in eadem vtrobique ratione habere. Eadem enim omnino erit demonſtratio, ſepoſita angulorum ad inuicem comparatione.

THEOR. V. PROP. V.

Si ſint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, & rectâ vtrobique à ſectione ad expoſitam diametrum ordinatim applicatâ, eadem ſit vtrobique ratio applicatæ ad tranſuerſam diametrum, & ad abſciſſam eiuſdem portionem à vertice: atque etiam angulus vnius applicata, & diametro contentus æqualis ſit angulo alterius ſimiliter contento; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.



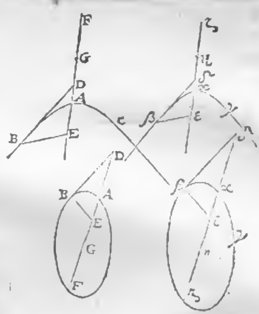
Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, B A C, $\beta\alpha\gamma$, earumque tranſuerſæ diametri A D, $\alpha\delta$: ordinatim autem ductis, BE quidem ad D A diametrum, productam vbi opus, & $\beta\epsilon$ ad $\delta\alpha$ diametrum, etiam vbi opus productam, vt BE ad E A, & B E ad A D, ita ſit $\beta\epsilon$ ad $\epsilon\alpha$, & $\beta\epsilon$ ad $\alpha\delta$: ſitque angulus $\beta\epsilon\alpha$ angulo B E A æqualis. Dico hyperbolam, vel ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC eſſe ſimilem.

Ducantur ipſis A D, $\alpha\delta$ tranſuerſis diametris contiguæ parametri A F, $\alpha\zeta$. Quoniam igitur vt D E A rectangulum ad E B quadratum, ita eſt D A ad A F: & vt $\delta\epsilon\alpha$ rectangulum ad $\epsilon\beta$ quadratum, ita eſt $\delta\alpha$ ad $\alpha\zeta$: vtque B E ad E A, ita eſt $\beta\epsilon$ ad $\epsilon\alpha$: & vt BE ad AD, ita eſt $\beta\epsilon$ ad $\alpha\delta$: ideo-

que vt BE ad vtramque DA, AE, hoc eſt DE, ita eſt βε ad vtramque δα, αε ſiue δε: & compoſitis rationibus, vt BE quadratum ad DEA rectangulum, ita eſt βε quadratum ad δεα rectangulum; vt DA ad AF, ita erit δα ad αζ. Eſtque βεα, hoc eſt δαζ angulus angulo BEA, ſiue DAF, æqualis: ideoque & tranſuerſæ AD, αδ diametri ſimiles: igitur, ex anteced. erit hyperbola, vel ellipſis, βαγ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. VI. PROP. VI.

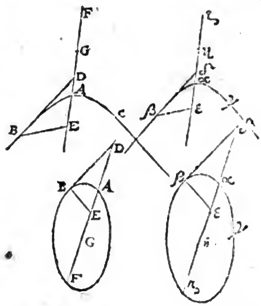
Si ſint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, & vtrobique recta ſectionem contingens expoſitæ diametro occurrat, atque à contactus puncto rectâ ad eandem diametrum ordinatim applicatâ, eadem vtrobique ſit ratio applicatæ ad diametri portiones ab ipſa & contingente ad verticem abſciſſas: atque etiam angulus vnius ordinatim ductâ & diametro contentus ęqualis alterius angulo ſimiliter contento; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.



Sint binę hyperbolæ, vel binæ ellipſes, BAC, βαγ, & earum diametri DE, δε: contingatq; ſectionem BAC in puncto B recta BD diametro occurrens in D: ſimiliterque & ſectionem βαγ contingat in β recta βδ diametro occurrens in δ: ſintq; ordinatim ductæ, BE quidem ad DE diametrum, & βε ad diametrum δε: vt autem BE ad AE, ita ſit βε ad αε: & vt BE ad AD, ita ſit βε ad αδ: ſitque angulus βεα æqualis angulo BEA. Dico hyperbolam, ſiue ellipſim, βαγ hyperbolæ, ſiue ellipſi, BAC eſſe ſimilem.

Sint enim ſectionum tranſuerſæ diametri AF, αζ: & centra G, η. Quoniam igitur, vt BE ad AE, ita eſt βε ad αε: & vt BE ad AD, ita βε ad αδ; vt BE ad vtramque AD, AE, hoc eſt DE, ita erit βε ad vtramque αδ, αε, ſiue δε: ideoque, ex æquali, vt AE ad ED, ita erit αε ad εδ. Sed, ex 25. primi huius, vt AE ad ED, ita

eſt E G ad E F: & vt $\alpha\epsilon$ ad $\epsilon\delta$, ita $\epsilon\eta$ ad $\epsilon\zeta$: igitur vt E G ad E F, ita erit $\epsilon\eta$ ad $\epsilon\zeta$: &, diuidendo, vt E G ad G F, ita erit $\epsilon\eta$ ad $\eta\zeta$: rurſuſque diuidendo, vt E A ad A G, ita erit $\epsilon\alpha$ ad $\alpha\eta$: & vt E A ad duplam A G, hoc eſt A F, ita erit $\epsilon\alpha$ ad $\alpha\zeta$. Sed vt B E ad E A, ita eſt $\beta\epsilon$ ad $\epsilon\alpha$: igitur, ex æquali, vt B E ad A F, ita etiam erit $\beta\epsilon$ ad $\alpha\zeta$. Eſtque $\beta\epsilon\alpha$ angulus æqualis angulo B E A: igitur, ex anteced. erit hyperbola, vel ellipſis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, B A C ſimilis. Quod erat demonſtrandum.



MONITVM.

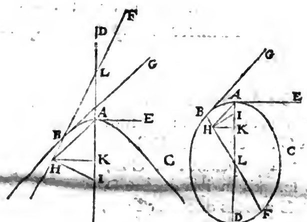
Expoſitis ſimilium coni ſectionum præcipuis & ſimplicioribus argumentis, ſatis conueniens iam occurrit inſtituendum de ipſarum Apolloniana vna, & binis Commandini definitionibus examen: quò tandem prohibetur, & fiat euidens, ipſas binis etiam diſſimilibus coni ſectionibus aptè conuenire. Quare & primò nobis eſt paranda trutina, ipſaq; neceſſarijs ſuis membris inſtruenda. Huiuſmodi erunt proximè præmittenda theoremata nonnulla, quæ fidem proponendis abſtruent. Sed nec omnis ex obliquo nobis incurret hæc diſquiſitio: ſiquidem pleraque ad rem præcipuam facientia ſecum inferet, quæ reuelata ſuum etiam in huius libri theorematum ſerie locum meritò obtinere debuiſſe tibi videbuntur.

THEOR. VII.

Digitized by Google

Theor. VII. Prop. VII.

In omni hyperbola, vel ellipſi, maior erit ſemper tranſuerſi axis ratio ad rectam parametrum ipſo minorem, quàm aſſumptæ cuiuſlibet tranſuerſæ diametri ad ſuam contiguam parametrum. Et contra, minor erit ſemper ratio tranſuerſi axis ad rectam parametrum ipſo maiorem, quàm tranſuerſæ cuiuſlibet diametri ad ſibi contiguam parametrum.



Sit hyperbola, vel ellipſis, quæcunque B A C, eiuſque tranſuerſus axis A D, recta parameter A E: ſit autem & eiuſdem aſſumpta quælibet diameter tranſuerſa B F, & eiuſdem contigua parameter B G: ſitque A D primùm maior quàm A E. Dico maiorem eſſe rationem D A ad A E, quàm F B ad B G.

Ordinatim ad F B diametrum, productam vbi opus, applicetur A H: erectaque ipſi F B perpendiculari H I, quæ axi occurrat in I, ducatur ad axem perpendicularis H K: & ſit ſectionis centrum L. Igitur vt F B ad B G, ita erit F H B rectangulum ad H A quadratum: & vt F H B rectangulum ad H I quadratum, ita erit D A ad A E: & ita L K A rectangulum ad K H quadratum, hoc enim in 60. tertij huius iam oſtenſum eſt. Sed vt L K A rectangulum ad K H quadratum, ſiue L K I rectangulum, ita eſt A K, ad K I: igitur vt D A ad A E, ita erit A K ad K I. Majorque eſt D A quàm A E: igitur & A K major erit quàm K I, & A H major quàm H I: ideoque & A H quadratum quadrato H I majus. Quare major erit F H B rectanguli ad H I quadratum, hoc eſt D A ad A E, ratio, quàm F H B rectanguli ad H A quadratum, hoc eſt quàm F B ad B G.

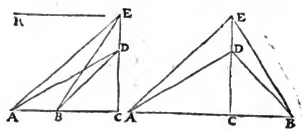
Quando autem tranſuerſus axis D A minor fuerit recta parametro A E, eadem erit demonſtratio. Quoniam enim hoc caſu ſemper minor fiet A K quàm K I, ideoque & H A quadratum quadrato H I minus; minor erit F H B rectanguli ad H I quadratum ratio, hoc eſt D A ad A E, quàm F H B rectanguli ad H A quadratum

V uu

hoc eſt quàm FB ad BG. Vtroque igitur caſu conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA I. PROP. VIII.

Si recta linea terminata producatur, aut ſecetur ita vt ſectæ partes fiant inuicem inæquales, & à productæ termino, aut ſectionis puncto, eidem perpendicularis erigatur, à cuius ſumptis binis punctis ad primò poſitæ lineæ vtrumque terminum rectæ agantur lineæ; major erit à citimo puncto ductarum quadrati majoris ad quadratum minoris ratio, quàm ductarum à remotiore puncto ſimiliter ſumptarum quadrati ad quadratum ratio.



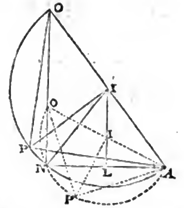
Sit AB recta linea producta, aut ſecta in C: ſitq; AC major quàm CB: & erecta perpendiculari CD, à ſumptis in ipſa duobus D & E punctis ducantur DA, DB, atque etiam EA, EB: & ſit major CE quàm CD. Dico majorem eſſe rationem AD quadrati ad DB quadratum, quàm AE quadrati ad EB quadratum.

Quoniam enim AC major eſt quàm CB, erit & AD major quàm DB: ideoque & AD quadratum quadrato DB majus. Itaque propoſitâ rectâ R, cujus quadratum ſit æquale quadrato DE vnà cum duplo EDC rectangulo, major erit ratio quadrati AD ad quadratum R, quàm quadrati DB ad idem R quadratum: & componendo, major erit ratio quadrati AD ad vtrumque AD & R quadratum, quàm quadrati DB ad vtrumque DB & R quadratum. Quare, permutando, major erit ratio quadrati AD ad quadratum DB, quàm vtriuſque AD & R quadrati ad vtrumque DB & R quadratum. Eſt autem quadratum AE quadratis AD, DE, & duplo EDC rectangulo æquale, hoc eſt æquale duobus AD & R quadratis: quadratumque EB itidem eſt duobus DB, ED quadratis vnà cum duplo eodem EDC rectangulo æquale, hoc eſt æquale duobus DB & R quadratis: major igitur erit AD quadrati ad DB quadratum ratio, quàm AE quadrati ad EB quadratum. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

LEMM. II. PROP. IX.

Si, vt cuiuſlibet trianguli ad verticem non rectanguli crurum quadrata ad inuicem, ita ſunt reſpondentes baſis partes à perpendiculari à vertice ducta factæ; erunt baſis partes inuicem æquales. Sin autem; erunt & baſis partes inæquales inuicem.

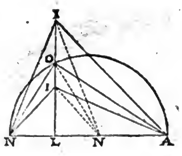


Sit triangulum quodlibet AIN ad verticem non rectangulum: & ducta ab I vertice ad AN baſim perpendiculari IL, vt AI quadratum ad IN quadratum, ita ſit AL ad LN. Dico AL eſſe æqualem LN.

Erecta enim perpendiculari NO, quæ productæ AI occurrat in O, vt AI ad IO, hoc eſt vt AL ad LN, ita erit AI quadratum ad IN quadratum, & ita AI quadratum ad AIO rectangulum: quare quadrato IN erit æquale rectangulum AIO: & vt AI ad IN, ita erit IN ad IO. Erecta igitur ad AI perpendiculari IP, quæ ſit æqualis IN, vt AI ad IP, ita erit IP ad IO: ductiſque OP, PA, erit OPA angulus rectus. Sed & rectus eſt ONA angulus, puncta igitur O, P, N, A in ſemicirculi erunt circumferentia. Suntque æquales IN, IP: igitur & eiuſdem ſemicirculi centrum erit I: ideoque &, propter perpendicularem IL, erit AL æqualis LN. Quod primò erat demonſtrandum.

Non ſit autem vt AI quadratum ad IN quadratum, ita AL ad LN. Dico AL, LN eſſe inuicem inæquales.

Deſcripto enim ſupra rectam AN (auctam priùs duplâ LN, ſi perpendicularis extra IL triangulum cadat) ſemicirculo cuius circumferentia rectæ LI, vbi opus productæ, occurrat in O, iungantur AO, NO. Quoniam igitur vt AL ad LN, ita eſt AO quadratum ad ON quadratum, non erit vt AI quadratum ad IN quadratum, ita AO quadratum ad ON quadratum: quare nec æqualia erunt inuicem AI, IN aut AO, NO quadrata: ideoque nec rectæ AI, IN aut AO, ON



inuicem erunt æquales: neque igitur rectæ A L, L N æquales erunt inuicem. Quod 2. erat demonſtrandum.

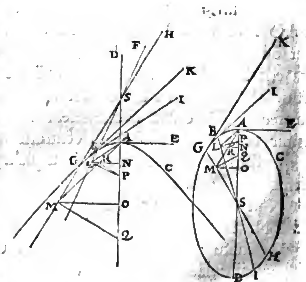
COROLL.

Sequitur igitur ex antecedente, ſi maior ſit ratio A L ad L N, quàm A I quadrati ad I N quadratum, & angulus A I N ſit acutus; vt recta A L maior ſit quàm L N. Minor autem, ſi angulus A I N ſit obtuſus.

THEOR. VIII. PROP. X.

In omni hyperbola, aut ellipſi, tranſuerſum axem habente recta parametro maiorem, maior ſemper erit tranſuerſæ cuiuſlibet diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et ſi tranſuerſus axis minor ſit recta parametro, etiam & tranſuerſę diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio minor erit quàm remotioris ad ſuam.

Sit hyperbola, vel ellipſis quæcunque B A C, cuius ſit axis tranſuerſus A D, & recta parameter A E: ſint autem & binæ eiuſdem tranſuerſæ diametri quælibet B F, G H, quarum B F ſit axi A D propior quàm G H: ſitque B I parameter contigua B F, & G K contigua G H: Et ſit A D primum maior quàm A E. Dico maiorem eſſe rationem F B ad B I, quàm H G ad G K.



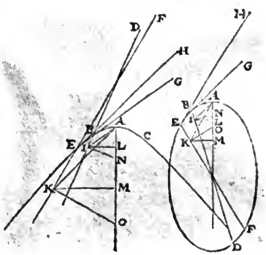
Ordinatim enim ſint applicatæ, ad diametrum quidem F B recta A L, & ad H G diametrum recta A M: ductiſque ad axem perpendicularibus L N, M O, erigantur L P quidem diametro B F perpendicularis, axique occurrens in P, & M Q diametro H G perpendicularis axi occurrens in Q: in quo autem recta A M rectam N L ſecat ſit punctum R, iungaturque P R: & ſit ſectionis centrum S. Quoniam igitur vt D A ad A E, ita eſt, ex 60 tertij huius, F L B rectangulum ad L P quadratum: & ita H M G rectangulum ad M Q quadra-

quadratum: atque etiam, vt in 7 huius oſtenſum eſt, ita AN ad NP, & AO ad OQ; vt AN ad NP, ita erit AO ad OQ: & permutando, vt AN ad AO, hoc eſt vt NR ad OM, ita erit NP ad OQ: rurſuſque permutando, vt NR ad NP, ita erit OM ad OQ. Suntque anguli ad N & O æquales: igitur angulus NPR angulo OQM æqualis erit. Sed propter vtrumque ad M & L angulum rectum, & MSQ angulum maiorem angulo LSP, erit reliquus SPL angulus reliquo SQM, hoc eſt NPR, angulo maior: quare minor erit NR quàm NL. Sed AN maior eſt quàm NP, quoniam & AD maior eſt quàm AE: igitur, ex 9 huius, maior erit AR quadrati ad RP quadratum, hoc eſt AM quadrati ad MQ quadratum, ratio, quàm AL quadrati ad LP quadratum. Sed vt MQ quadratum ad HMG rectangulum, ita eſt LP quadratum ad FLB rectangulum: igitur, ex æquali, maior erit AM quadrati ad HMG rectangulum, hoc eſt KG ad GH, ratio, quàm AL quadrati ad FLB rectangulum, hoc eſt quàm IB ad BF. Quare, conuertendo, maior erit ratio FB ad BI, quàm HG ad GK.

At ſi tranſuerſus axis AD minor fuerit recta parametro AE; quoniam & hoc caſu minor ſemper erit AN quàm NP, & AO quàm OQ, eodem modo oſtendetur minorem fore rationem AR quadrati ad RP quadratum, hoc eſt AM quadrati ad MQ quadratum, quàm AL quadrati ad LP quadratum: ideoq; & minorem fore FLB rectanguli ad AL quadratum, hoc eſt FB ad BI, rationem, quàm HMG rectanguli ad AM quadratum, hoc eſt quàm HG ad GK. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. IX. PROP. XI.

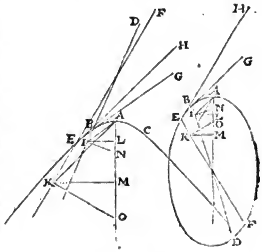
In omni hyperbola, aut ellipſi, maior eſt ratio tranſuerſæ diametri axi propioris ad ſuam minorem contiguam parametrum, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et contra, minor eſt tranſuerſæ diametri axi propioris ad ſuam maiorem parametrum contiguam ratio, quàm remotioris ad ſuam.



Oportet autem, ſi propoſita ſectio ſit ellipſis, vt binarum diametrorum remotio ab vno eodemque axe ſumatur.

Sit igitur propoſita quæcunq; hyperbola, vel ellipſis, BAC, cuius ſint binæ BD, EF, tranſuerſæ diametri, & eiſdem contiguæ parametri BG, EH: ſitq; BD axi propior quàm EF, &

maior primùm quàm B G. Dico maiorem eſſe rationem B D ad B G, quàm E F ad E H.



Sit enim axis ſectionis A M, & eius vertex A: ordinatimque applicentur ad B D quidem diametrum recta A I, & ad diametrum E F recta A K: ducanturque I L, K M perpendiculares ad axem, & I N, K O perpendiculares, illa quidem ad B I, & hæc ad K E, quæ axi occurrant in N & O. Quoniam igitur vt B D ad B G, ita eſt D I B rectangulum ad I A quadratum: & vt D I B rectangulum ad I N quadratum, ita eſt axis tranſuerſus ad rectam parametrum, & ita A L ad L N, hoc enim ex ſupra oſtenſis iam patet: & eſt B D maior quàm B G, ideoq; & rectangulum D I B quadrato I A maius; minor erit ratio quadrati I A ad quadratum I N, quàm rectanguli D I B ad idem I N quadratum, hoc eſt quàm A L ad L N. Eſtque angulus A I N acutus, quoniam & B I N angulus eſt rectus: igitur, ex coroll. ad 8. huius, erit A L maior quàm L N: ideoque & tranſuerſus axis recta parametro maior erit. Quare &, ex anteced. maior erit B D tranſuerſæ diametri axi propioris ad B G ſuam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F diametri tranſuerſæ ad E H contiguam ſuam parametrum. Quod 1°. erat demonſtrandum.

At, ſi tranſuerſa BD diameter minor ſit quàm B G contigua ſibi parameter; quoniam & hoc caſu maior erit A L quadrati ad quadratum I N ratio, quàm A L ad L N, ideoque minor erit A L quàm L N, atque etiam tranſuerſus axis minor recta parametro: etiam, ex antecedente, minor erit BD tranſuerſæ diametri axi propioris ad BG contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F ad E H. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

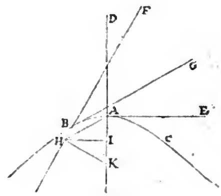
MONITVM.

Potuerant certè proximè præmiſſa tria theoremata generaliùs de ſola hyperbola concipi & demonſtrari, quàm de combinatis hyperbola & ellipſi ſimul. Sed, quoniam inter vtramque vt plurimùm ſatis conuenit, & ſunt ipſarum παράλληλα *ſi non perpetua & continua, ſaltem frequentia: idcirco, ne adhuc diuortium facerent (quandoquidem ab æqualitatis laterum primariæ figuræ ad inuicem poſitione, ellipſis illico in circuli circumferentiam tranſeat) maluimus ibidem parciùs aliquantò de hyperbola meditari, & minus concipere, quò aptiùs de vtraque coniunctim proponeretur. Ne tamen fraus inde fiat hyperbolæ, de ipſa nonnulla inſuper proponemus hujuſmodi.*

Digitized by Google

THEOR. X. PROP. XII.

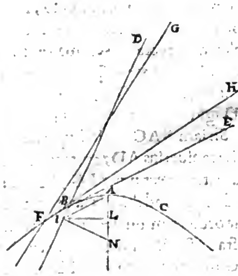
In omni hyperbola tranſuerſum axem habente rectæ parametro æqualem, erunt & omnes tranſuerſæ diametri ſuis contiguis parametris æquales.



Sit hyperbola B A C, cuius axis tranſuerſus D A æqualis ſit A E rectæ parametro: ſit autem & tranſuerſa quæcunque diameter F B, eiuſdemque contigua parameter B G. Dico FB eſſe æqualem BG. Ordinatim ad F B diametrum productam applicetur A H: ducanturque H I ad axem perpendicularis, & H K perpendicularis ad F H. Quoniam igitur D A eſt æqualis A E, erit & A I æqualis I K, & A H æqualis H K: ideoque & A H quadratum quadrato HK æquale. Vt autem DA ad AE, ita eſt FHB rectangulum ad HK quadratum: vtq; FB ad BG, ita eſt F H B rectangulum ad AH quadratum: igitur vt D A ad A E, ita etiam erit F B ad BG. Et eſt DA æqualis AE: quare & FB erit æqualis BG. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROP. XIII.

Si, in hyperbola, aſſumpta quælibet tranſuerſa diameter contiguæ ſibi parametro ſit æqualis; erunt & eiuſdem tranſuerſæ omnes diametri contiguis ſuis parametris ęquales.

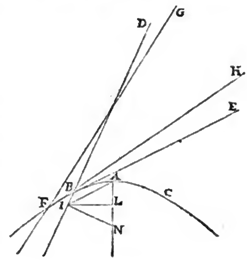


Sit hyperbola B A C, eiuſque tranſuerſa quælibet diameter BD contiguæ ſibi parametro B E æqualis: ſumaturque eiuſdem alia quæcunque diameter tranſuerſa F G, cuius ſit contigua parameter FH. Dico F G eſſe æqualem FH.

Sit enim ſectionis axis AN, eiuſq; vertex A: & ad vtramlibet expoſitam diametrum, vt ad BD, ordinatim applicetur A I: atq; ad axem perpendicularis ducatur IL: ſitq; I N eidem B D diametro perpendicularis. Igitur, quoniam vt B D ad B E, ita eſt D I B rectangulum ad IA quadratum: erit rectangulo D I B æquale quadratum IA. Sed vt D I B rectangulum, hoc eſt IA

Digitized by Google

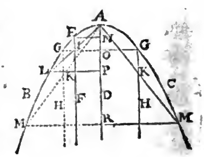
quadratum, ad IN quadratum, ita eſt AL ad LN: eſtque, propter angulum BIN rectum, angulus AIN acutus: igitur, ex 9 huius, erit AL æqualis LN. Sed vt AL ad LN, ita eſt, ex oſtenſis in 7 huius, tranſuerſus axis ad rectam parametrum: igitur rectæ parametro erit tranſuerſus axis æqualis. Quare, ex anteced. & tranſuerſa FG diameter contiguæ FH parametro æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XII. PROP. XIIII.

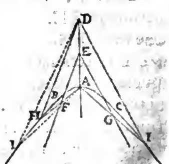
In omni hyperbola, veluti & in omni parabola; binarum diametrorum illa axi propior erit, ad quam ordinatæ ſub maiore acuto angulo applicabuntur.

Sit primùm parabola BAC, cuius axis AD, eiuſque binæ diametri quælibet EF, GH, ſiue ad eaſdem axis partes, ſiue ad diuerſas: ſint autem ordinatim ductæ ad diametrum quidem EF recta AI, & ad diametrum GH recta AK: & ſit angulus AIE acutus maior acuto AKG. Dico diametrum EF axi AD propiorem eſſe quàm GH.



Productæ AI, AK ſectioni occurrant, hæc in M, illa in L: & ad axem applicentur EN, GO, LP, MR. Quoniam igitur AKG, hoc eſt MAR, angulus minor eſt angulo AIE, hoc eſt LAP: abſcindet recta AM maiorem ſectionis portionem, & maior erit quam AL: quare & MR maior erit quàm dimidia LP: ideoq; & eius dimidia, ſcilicet GO, maior erit quàm dimidia LP, hoc eſt EN. Ad AD igitur axem paraboles propiùs accedit EF diameter quàm GH.

Sit iam BAC ſectio hyperbola, cuius axis tranſuerſus AD, centrum E, & binæ diametri quæcunque EG, EF, ſiue ad eaſdem, ſiue ad diuerſas axis partes: ſintque ordinatim ductæ, ad EF diametrum recta AF, & ad EG diametrum recta AG: ſit autem angulus AFE acutus maior acuto AGE. Dico diametrum EF axi AD propiorem eſſe quàm EG: hoc eſt angulum AEF minorem eſſe angulo AEG.



productis

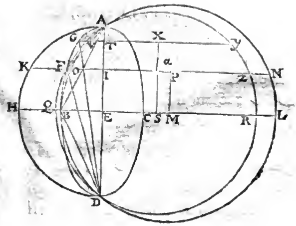
Productis enim ad ſectionem, A F quidem in H, & A G in I, iungantur D H, D I. Igitur, propter æquales A G, G I, Itemque A F, F H, rectamque A E rectæ E D æqualem, erit D I æquidiſtans E G, & D H, ęquidiſtans EF: ideoque & angulus AID æqualis erit angulo A G E, & angulus A H D angulo A F E: quare & angulus AHD angulo AID major erit. Ab ijſdem igitur rectę AD terminis binæ AH, DH rectæ ſibi inuicem occurrentes in H ſectionis puncto, ad eandem ſectionem verſus I punctum inclinatæ, & ipſis A I, D I rectis minores, intra triangulum AID concurrent, & ſingulos ADH & D A H angulos ſingulis A D I & D A I angulis minores efficient. Eſtque angulus A D H angulo A E F æqualis, vt & angulus A D I angulo A E G: igitur & angulus A E F angulo A E G minor erit: ideoque & diameter E F ad axem E A propiùs accedet quàm E G. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Igitur Quæ in parabola & hyperbola ſimiles ducentur diametri, æqualiter ab axe remouebuntur: & conuerſim.

THEOR. XIII. PROP. XV.

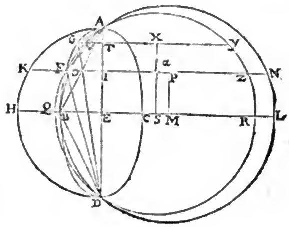
In omni ellipſi, quæ à majoris axis terminis ad idem ſectionis punctum binæ ducentur rectæ lineæ, angulum continebunt recto majorem: maximuſque omnium is erit qui ad mediam ſectionem fiet: eique propior ſemper remotiore maior erit. Quę autem à minoris axis terminis ducentur, minorem recto facient angulum: minimuſque omnium ad mediam fiet ſectionem: & ei propior remotiore ſemper minor erit.



Sit ellipſis B A C, cujus axis major AD, minor BC, centrum E: & ſumpto quolibet in ſectione puncto F, ducantur A F, D F: iungantur que AB, BD: ſumpto autem quolibet etiam alio, in ſectione A B, puncto G, quod à media ſectione B ſit remotius, quàm F, iungantur AG, DG. Dico ſingulos ABD, AFD, AGD angulos recto eſſe majores: omniumque eſſe

maximum ABD: &, qui ei propior factus eſt, AFD angulum remotiore AGD eſſe majorem.

Deſcribatur circa AD diametrum ſemicirculi circumferentia AHD quæ productum EB axem ſecet in H: ducaturque ad AD perpendicularis FI, quæ producta ad partes F ſemicirculi circumferentię occurrat in K: junctæque intelligantur AH, HD, AK, KD. Quoniam igitur AD major eſt quàm BC; erit & AE, hoc eſt HE maior quàm BE. Eſt autem angulus AHD rectus: quare obtuſus erit ABD angulus. Quoniam autem vt AE quadratum, ad EB quadratum, ita eſt AID rectangulum ad IF quadratum: & vt AE quadratum ad EH quadratum, ita eſt idem AID rectangulum ad IK quadratum, quadratumque HE quadrato BE majus eſt; erit & quadratum KI quadrato FI majus: rectaque KI major quàm FI. Quare & recto AKD angulo erit major AFD angulus. Similiterq; & recto major oſtendetur AGD angulus: Quare ſinguli ABD, AFD, AGD anguli recto erunt majores. Quod erat demonſtrandum.



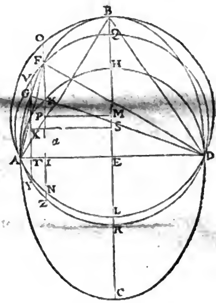
Deſcribatur nunc circa ABD triangulum circulus ABDL, cuius ſit BL diameter, & centrum M: productaque FI eiuſdem circumferentiæ occurrat in N, & O: ſitque ad FN perpendicularis MP: & ductæ intelligantur AO, OD. Major igitur eſt BM quàm OP: &, propter æquales EM, IP, erit & BE major quàm OI: majorque erit PI ad IO ratio, quàm ME ad EB: & componendo major erit PO ad IO, quàm MB ad EB: &, ſumptis antecedentium duplis, major NO ad IO ratio, quàm LB ad EB: Igitur diuidendo, major erit NI ad IO ratio, hoc eſt NIO, ſiue AID, rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm LEB, ſiue AED, rectanguli ad EB quadratum. Sed vt AEB rectangulum ad EB quadratum, ita eſt AID rectangulum ad IF quadratum: Major igitur erit AID rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm ad IF quadratum: quare & IF major erit quàm IO: ideoque & punctum F extra circuli ABDL circumferentiam erit. Quare & obtuſus AFD angulus minor erit AOD, hoc eſt ABD, angulo. Quod 2° erat demonſtrandum.

Deſcripto autem circa AFD triangulum circulo AFQDR, cuius ſit diameter QR, & centrum S, ducatur ad AD rectam perpendicularis GT, circuli AFDR circumferentiæ occurrens in V & Y,

Digitized by Google

rectæque SX æquidiſtanti AD in X: in quo autem recta FN eandem AFDR circumferentiam ſecat, ſit punctum Z: & in quo rectam SX ſecat ſit punctum α ductæque etiam intelligantur AV, VD. Major igitur eſt Fα quàm VX: & propter Iα, TX æquales, minor erit TV quàm IF; ideoque & major erit XT ad TV ratio, quàm αI ad IF: componendoque major XV ad TV, quàm αF ad IF: &, ſumptis antecedentium duplis, major YV ad TV, quàm ZF ad IF: Quare, diuidendo, major erit YT ad TV, hoc eſt YTV, ſiue ATD, rectanguli ad TV quadratum, ratio, quàm ZIF, ſiue AID, rectanguli ad IF quadratum. Sed vt AID rectangulum ad IF quadratum, ita eſt ATD rectangulum ad TG quadratum: Major igitur erit ratio ATD rectanguli ad TV quadratum, quàm ad TG quadratum: Ideoque & minor erit TG quàm TV. Quare punctum G extra circuli AVFDR circumferentiam erit. Itaque & minor erit AGD angulus angulo AFD. Quod vltimò erat demonſtrandum.

Nec aliter, omnibus permutatis, abs minoris axis AD terminis inclinatæ ad ſectionem binæ DF, AF atq; etiam DG, AG lineæ minores recto probabuntur ſingulos continere DFA, DGA angulos: & omnium minimum eſſe DBA angulum qui ad mediam ſectionem fit: atque ei propiorem vt DFA angulum remotiore vt DGA etiam ſemper eſſe minorem.



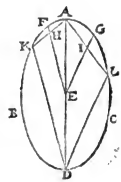
COROLL.

Hinc fit euidens Binorum punctorum in ellipſi ad quæ à maioris axis terminis inclinatæ lineæ angulos conſtituunt, illud à minori axe remotius eſſe, & alterutri maioris axis termino propius, in quo minor conſiſtit angulus. Et contrarium euenire inclinatis ad eadem ipſa ſectionis puncta ab vtroque minoris axis termino lineis.

THEOR. XIV. PROP. XVI.

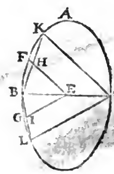
In omni ellipſi, binarum diametrorum illa maiori axi propior erit, ad quam ordinatæ ſub minore obtuſo angulo applicabuntur: & minori axi illa erit propior, ad quam ordinatæ ſub maiore acuto angulo ducentur.

Sit ellipſis quæcunque BAC, cujus axis primùm maior AD, centrum E, eiuſdemque binæ quęlibet diametri EF, EG, ſiue ad eaſdem, ſiue ad diuerſas axis AD partes: ſitque ad EF diametrum ordinatim applicata AH, & ad EG diametrum ordinatim ducta AI: ſit autem angulus AHE minor angulo AIE. Dico EF diametrum axi ED propiorem eſſe, quàm EG: hoc eſt angulum AEF minorem eſſe angulo AEG.



Productis enim ad ſectionem, AH quidem in K, & AI in L: ductiſque DK, DL, erit DK æquidiſtans EF, & DL æquidiſtans EG, ideoque & angulus AKD angulo AHE erit ęqualis, & angulus ALD ęqualis angulo AIE: Minor igitur erit angulus AKD angulo ALD. Sed & vterque AKD, ALD angulus, ex anteced. erit obtuſus: &, ex eiuſdem coroll. punctum K propius erit axis termino A quàm punctum L: Erit igitur DK axi propior quàm DL: ideoque & angulus ADK, hoc eſt AEF, minor erit angulo ADL, hoc eſt AEG: & diameter EF axi AD propior erit quàm EG. Quod 1° erat demonſtrandum.

Sit jam ellipſis BAC minor axis BC, & centrum E, eiuſq; binę diametri EF, EG: ſitq; ad diametrum EF ordinatim ducta BH, & ad EG diametrum ducta ordinatim BI: atq; angulus BHE minor ſit angulo BIE. Dico diametrum EF ab axe BC remotiorem eſſe quàm EG.



Productis enim, vt ſupra, BH in K, & BI in L, ductiſque CK, CL, erit angulus BKC acutus minor acuto BLC: quare & punctum K remotius erit ab axis minoris termino B quàm punctum L: ideoque & angulus BCK, hoc eſt BEF, maior erit angulo BCL, hoc eſt BEG: Quare & diameter EF ab axe BC remotior erit quàm EG. Quod 2° erat demonſtrandum.

COROLL.

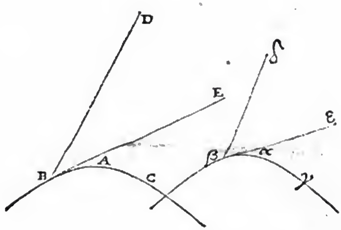
Hinc etiam, & hoc fit euidens. Similes diametros æqualiter ab vno eodemque ellipſeos axe remoueri & conuerſim.

Digitized by Google

THEOR. XV. PROP. XVII.

Si ſint binæ hyperbolæ, & vtrobique aſſumptæ cuilibet tranſuerſæ diametro contigua parameter ſit æqualis; erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binę hyperbolę BAC, $\beta\alpha\gamma$: ſitque hyperbolę BAC expoſita quælibet diameter tranſuerſa BD, & eidem contigua parameter BE: ſimiliter & hyperbolæ $\beta\alpha\gamma$ ſit aſſumpta quæcunque tranſuerſa diameter $\beta\delta$, eidemque contigua parameter $\beta\epsilon$: ſitque BD æqualis BE, & $\beta\delta$ æqualis $\beta\epsilon$. Dico hyperbolam $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ BAC eſſe ſimilem.



Quoniam enim in hyperbola BAC tranſuerſa BD diameter contiguæ BE parametro æqualis eſt; erunt, ex 13 huius, & omnes ejuſdem tranſuerſæ diametri ſuis contiguis parametris æquales: ideoque & axis tranſuerſus rectę parametro æqualis. Sed & eadem ratione erunt hyperbolæ $\beta\alpha\gamma$ tranſuerſæ omnes diametri contiguis ſuis parametris ęquales, atque ideo & tranſuerſus axis rectę parametro ęqualis: igitur ex 4 huius, erit altera alteri hyperbola ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

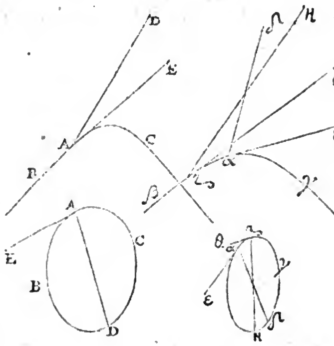
COROLL.

Itaque, Si binæ hyperbolæ coniugatas diametros, tranſuerſam ſcilicet & ſecundam, æquales inuicem habeant vtrobique; erit etiam altera alteri hyperbola ſimilis.

Digitized by Google

THEOR. XVI. PROP. XVIII.

Si binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, figurarum latera in eadem ad inuicem ratione habeant vtrobique, ſed non æqualiter vtrobique inuicem inclinata, neque, ſi ſint hyperbolæ, inuicem æqualia; non erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.



Sint binæ hyperbolę, vel binæ ellipſes, BAC, $\beta\alpha\gamma$, quarum tranſuerſæ diametri ſint AD, $\alpha\delta$, eiſdemq; contiguę parametri AE, $\alpha\epsilon$: & vt DA ad AE, ita ſit $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$: non ſit autem angulus $\delta\alpha\epsilon$ angulo DAE æqualis: Neque in binis hyperbolis, DA ſit æqualis AE, aut $\delta\alpha$ ipſi $\alpha\epsilon$. Dico hyperbolam, vel ellipſim, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC non eſſe ſimilem.

Si enim fieri poteſt, ſit altera alteri ſimilis: & in alterutra, vt $\beta\alpha\gamma$, ſectione ducatur per 67 tertij hujus, tranſuerſa diameter $\zeta\eta$ ad quam, vbi opus productam, ordinatæ in angulo ipſi DAE æquali applicentur: ſitque eidem contigua parameter $\zeta\theta$, ideoque & angulus $\eta\zeta\theta$ angulo DAE æqualis. Igitur, ex 2 huius, vt DA ad AE, hoc eſt vt $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$, ita erit $\eta\zeta$ ad $\zeta\theta$. Quoniam autem angulus $\delta\alpha\epsilon$ angulo DAE non eſt æqualis: neque in binis hyperbolis AE æqualis eſt DA, aut $\alpha\epsilon$ æqualis $\delta\alpha$; non erit $\eta\zeta\theta$ angulus angulo $\delta\alpha\epsilon$ æqualis, ſed vel major vel minor. Tranſuerſarum igitur DA, $\delta\alpha$ diametrorum altera, ex 14, aut 16 hujus, axis erit, vel axi propior quàm altera: ideoque &, ex 10, vel 11 huius, maior erit vel minor ratio $\delta\alpha$ ad $\alpha\epsilon$, hoc eſt DA ad AE, quàm $\eta\zeta$ ad $\zeta\theta$. Sed iam eadem poſita eſt: igitur & eadem erit, & maior minorve. Quod eſt abſurdum. Non ſunt igitur propoſitæ BAC, $\beta\alpha\gamma$ ſectiones ſimiles. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Igitur, Et ſi binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, vtrobique

tranſuerſam & ſecundam, ſiue conjugatas diametros in eadem ad inuicem ratione habeant, ſed non æqualiter vtrobique inuicem inclinatas, neq;, ſi ſint hyperbolæ, inuicem vtrobiq; æquales; non erit dictarum ſectionum altera alteri ſimilis.

MONITVM.

Vtique iam ex ſupra demonſtratis ſatìs patet, quantum à vera ſimilium hyperbolarum aut ellipſium definitione abſint Apolloniana Eutocij vna, & binæ Commandini ſimilium eiuſmodi ſectionum definitiones, quæ & binis etiam diſſimilibus hyperbolis, aut ellipſibus, quales in proxime antecedente tum Propoſitione, tum Corollario, ſunt propoſitæ, aptè conuenire poſſint. Quandoquidem ſi eiuſmodi diſſimiles hyperbolæ, ſiue ellipſes, figurarum latera, vel tranſuerſam & ſecundam conjugatas diametros, vtrobique in eadem ratione habeant; etiam & ſimiles diametri à vertice portiones ad conterminas ordinatim à ſectione applicatas, ideoq; ipſasmet etiam applicatas ad inuicem eodem ordine ſumptas in eadem vtrobique ratione habebunt, vt ex 4 huius ibidem appoſitum Coroll. 3 certò pronunciauit. Quanquam igitur vtrobique ſit æquidiſtantium baſi, aut cuipiam ordinatim applicatæ, numero æqualium ad conterminas diametri portiones à vertice abſciſſas, atque etiam abſciſſarum ad inuicem eadem ratio; quæ Apollonij ſimilium Conicarum linearum, vel ſimilium Coni-ſectionum definitio eſt, ideoq; & vtrobique eadem ſit laterum figuræ ad inuicem ratio, atque etiam eadem vtrobique tranſuerſæ & ſecundæ diametrorum conjugatarum ad inuicem, quæ ſunt Commandini ambæ ſimilium hyperbolarum aut ellipſium definitiones: Nihilo tamen magìs ſimiles dicentur binæ ſectiones aut portiones ab iiſdem conceſſis, niſi ſi angulorum ab ordinatim applicatis aut æquidiſtantibus vnius factorum cum alterius ſimiliter conſtitutis angulis, æqualitas etiam probetur: hoc eſt niſi factæ vtrobique ſectionis figuræ ſimiles ſint inuicem: aut propoſitæ ordinatim applicatæ ad ſimiles diametros vtrobique conſtituantur: veluti ſi expoſita vtrobique diameter etiam axis ſit. Quoniam autem, quod ſuprà notauimus, qualibet aſſumpta ſectionis diameter etiam principalis ejuſdem ſectionis diameter, ſiue diameter ex generatione, vel ex coni ſectione dici poſſit, facta ſcilicet ſaltem in cono ſcaleno ab aliquo plano non ad rectos baſi angulos ſecto: Idcirco & circa quamlibet diametrum

Digitized by Google

inuicem erunt æquales: neque igitur rectæ A L, L N æquales erunt inuicem. Quod 2. erat demonſtrandum.

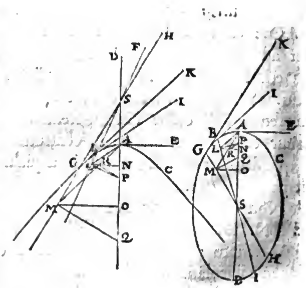
COROLL.

Sequitur igitur ex antecedente, ſi maior ſit ratio A L ad L N, quàm A I quadrati ad I N quadratum, & angulus A I N ſit acutus; vt recta A L maior ſit quàm L N. Minor autem, ſi angulus A I N ſit obtuſus.

THEOR. VIII. PROP. X.

In omni hyperbola, aut ellipſi, tranſuerſum axem habente recta parametro maiorem, maior ſemper erit tranſuerſæ cuiuſlibet diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et ſi tranſuerſus axis minor ſit recta parametro, etiam & tranſuerſę diametri eidem axi propioris ad ſuam contiguam parametrum ratio minor erit quàm remotioris ad ſuam.

Sit hyperbola, vel ellipſis quæcunque B A C, cuius ſit axis tranſuerſus A D, & recta parameter A E: ſint autem & binæ eiuſdem tranſuerſæ diametri quælibet B F, G H, quarum B F ſit axi A D propior quàm G H: ſitque B I parameter contigua B F, & G K contigua G H: Et ſit A D primum maior quàm A E. Dico maiorem eſſe rationem F B ad B I, quàm H G ad G K.



Ordinatim enim ſint applicatæ, ad diametrum quidem F B recta A L, & ad H G diametrum recta A M: ductiſque ad axem perpendicularibus L N, M O, erigantur L P quidem diametro B F perpendicularis, axique occurrens in P, & M Q diametro H G perpendicularis axi occurrens in Q: in quo autem recta A M rectam N L ſecat ſit punctum R, iungaturque P R: & ſit ſectionis centrum S. Quoniam igitur vt D A ad A E, ita eſt, ex 60 tertij huius, F L B rectangulum ad L P quadratum: & ita H M G rectangulum ad M Q quadra-

quadratum: atque etiam, vt in 7 huius oſtenſum eſt, ita AN ad NP, & AO ad OQ; vt AN ad NP, ita erit AO ad OQ: & permutando, vt AN ad AO, hoc eſt vt NR ad OM, ita erit NP ad OQ: rurſuſque permutando, vt NR ad NP, ita erit OM ad OQ. Suntque anguli ad N & O æquales: igitur angulus NPR angulo OQM æqualis erit. Sed propter vtrumque ad M & L angulum rectum, & MSQ angulum maiorem angulo LSP, erit reliquus SPL angulus reliquo SQM, hoc eſt NPR, angulo maior: quare minor erit NR quàm NL. Sed AN maior eſt quàm NP, quoniam & AD maior eſt quàm AE: igitur, ex 9 huius, maior erit AR quadrati ad RP quadratum, hoc eſt AM quadrati ad MQ quadratum, ratio, quàm AL quadrati ad LP quadratum. Sed vt MQ quadratum ad HMG rectangulum, ita eſt LP quadratum ad FLB rectangulum: igitur, ex æquali, maior erit AM quadrati ad HMG rectangulum, hoc eſt KG ad GH, ratio, quàm AL quadrati ad FLB rectangulum, hoc eſt quàm IB ad BF. Quare, conuertendo, maior erit ratio FB ad BI, quàm HG ad GK.

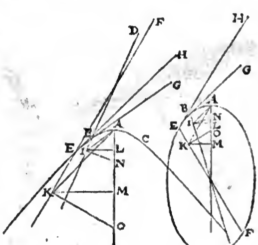
At ſi tranſuerſus axis AD minor fuerit recta parametro AE; quoniam & hoc caſu minor ſemper erit AN quàm NP, & AO quàm OQ, eodem modo oſtendetur minorem fore rationem AR quadrati ad RP quadratum, hoc eſt AM quadrati ad MQ quadratum, quàm AL quadrati ad LP quadratum: ideoq; & minorem fore FLB rectanguli ad AL quadratum, hoc eſt FB ad BI, rationem, quàm HMG rectanguli ad AM quadratum, hoc eſt quàm HG ad GK. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. IX. PROP. XI.

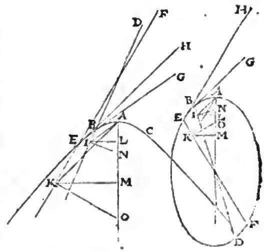
In omni hyperbola, aut ellipſi, maior eſt ratio tranſuerſæ diametri axi propioris ad ſuam minorem contiguam parametrum, quàm remotioris cuiuſlibet ad ſuam. Et contra, minor eſt tranſuerſæ diametri axi propioris ad ſuam maiorem parametrum contiguam ratio, quàm remotioris ad ſuam.

Oportet autem; ſi propoſita ſectio ſit ellipſis, vt binarum diametrorum remotio ab vno eodemque axe ſumatur.

Sit igitur propoſita quæcunq; hyperbola, vel ellipſis, BAC, cuius ſint binæ BD, EF, tranſuerſæ diametri, & eiſdem contiguæ parametri BG, EH: ſitq; BD axi propior quàm EF, &



maior primùm quàm B G. Dico maiorem eſſe rationem B D ad B G, quàm E F ad E H.



Sit enim axis ſectionis A M, & eius vertex A : ordinatimque applicentur ad B D quidem diametrum recta A I, & ad diametrum E F recta A K : ducanturque I L, K M perpendiculares ad axem, & I N, K O perpendiculares, illa quidem ad B I, & hæc ad K E, quæ axi occurrant in N & O. Quoniam igitur vt B D ad B G, ita eſt D I B rectangulum ad I A quadratum : & vt D I B rectangulum ad I N quadratum, ita eſt axis tranſuerſus ad rectam parametrum, & ita A L ad L N, hoc enim ex ſupra oſtenſis iam patet : & eſt B D maior quàm B G, ideoq; & rectangulum D I B quadrato I A maius; minor erit ratio quadrati I A ad quadratum I N, quàm rectanguli D I B ad idem I N quadratum, hoc eſt quàm A L ad L N. Eſtque angulus A I N acutus, quoniam & B I N angulus eſt rectus : igitur, ex coroll. ad 8. huius, erit A L maior quàm L N : ideoque & tranſuerſus axis recta parametro maior erit. Quare &, ex anteced. maior erit B D tranſuerſæ diametri axi propioris ad B G ſuam contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F diametri tranſuerſæ ad E H contiguam ſuam parametrum. Quod 1°. erat demonſtrandum.

At, ſi tranſuerſa BD diameter minor ſit quàm B G contigua ſibi parameter; quoniam & hoc caſu maior erit AL quadrati ad quadratum I N ratio, quàm A L ad L N, ideoque minor erit A L quàm L N, atque etiam tranſuerſus axis minor recta parametro : etiam, ex antecedente, minor erit BD tranſuerſæ diametri axi propioris ad BG contiguam parametrum ratio, quàm remotioris E F ad E H. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

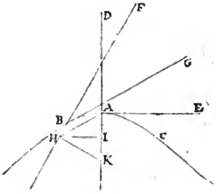
MONITVM.

Potuerant certè proximè præmiſſa tria theoremata generaliùs de ſola hyperbola concipi & demonſtrari, quàm de combinatis hyperbola & ellipſi ſimul. Sed, quoniam inter vtramque vt plurimùm ſatis conuenit, & ſunt ipſarum παράλληλα *ſi non perpetua & continua, ſaltem frequentia: idcirco, ne adhuc diuortium facerent (quandoquidem ab æqualitatis laterum primariæ figuræ ad inuicem poſitione, ellipſis illico in circuli circumferentiam tranſeat) maluimus ibidem parciùs aliquantò de hyperbola meditari, & minus concipere, quò aptiùs de vtraque coniunctim proponeretur. Ne tamen fraus inde fiat hyperbolæ, de ipſa nonnulla inſuper proponemus huiuſmodi.*

Digitized by Google

THEOR. X. PROP. XII.

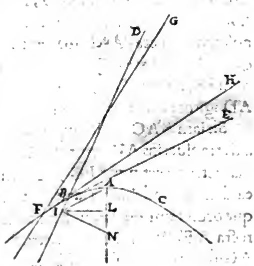
In omni hyperbola tranſuerſum axem habente rectæ parametro æqualem, erunt & omnes tranſuerſæ diametri ſuis contiguis parametris æquales.



Sit hyperbola B A C, cuius axis tranſuerſus D A æqualis ſit A E rectæ parametro: ſit autem & tranſuerſa quæcunque diameter F B, eiuſdemque contigua parameter B G. Dico FB eſſe æqualem BG. Ordinatim ad F B diametrum productam applicetur A H: ducanturque H I ad axem perpendicularis, & H K perpendicularis ad F H. Quoniam igitur D A eſt æqualis A E, erit & A I æqualis I K, & A H æqualis H K: ideoque & A H quadratum quadrato HK æquale. Vt autem DA ad AE, ita eſt FHB rectangulum ad HK quadratum: vtq; FB ad BG, ita eſt F H B rectangulum ad AH quadratum: igitur vt D A ad A E, ita etiam erit F B ad BG. Et eſt DA æqualis AE: quare & F B erit æqualis B G. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XI. PROP. XIII.

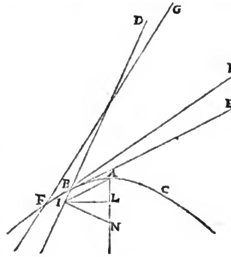
Si, in hyperbola, aſſumpta quælibet tranſuerſa diameter contiguæ ſibi parametro ſit æqualis; erunt & eiuſdem tranſuerſæ omnes diametri contiguis ſuis parametris ęquales.



Sit hyperbola B A C, eiuſque tranſuerſa qualibet diameter B D contiguæ ſibi parametro B E æqualis: ſumaturque eiuſdem alia quæcunque diameter tranſuerſa F G, cuius ſit contigua parameter FH. Dico F G eſſe æqualem FH.

Sit enim ſectionis axis AN, eiuſq; vertex A: & ad vtramlibet expoſitam diametrum, vt ad BD, ordinatim applicetur A I: atq; ad axem perpendicularis ducatur IL: ſitq; I N eidem B D diametro perpendicularis. Igitur, quoniam vt B D ad B E, ita eſt D I B rectangulum ad IA quadratum: erit rectangulo D I B æquale quadratum IA. Sed vt D I B rectangulum, hoc eſt IA

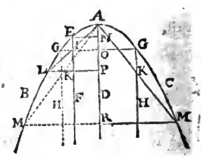
quadratum, ad IN quadratum, ita eſt AL ad LN: eſtque; propter angulum BIN rectum, angulus AIN acutus: igitur, ex 9 huius, erit AL æqualis LN. Sed vt AL ad LN, ita eſt, ex oſtenſis in 7 huius, tranſuerſus axis ad rectam parametrum: igitur rectæ parametro erit tranſuerſus axis æqualis. Quare, ex anteced. & tranſuerſa FG diameter contiguæ FH parametro æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XII. PROP. XIIII.

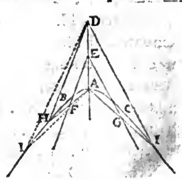
In omni hyperbola, veluti & in omni parabola; binarum diametrorum illa axi propior erit, ad quam ordinatæ ſub maiore acuto angulo applicabuntur.

Sit primùm parabola BAC, cuius axis AD, eiuſque binæ diametri quælibet EF, GH, ſiue ad eaſdem axis partes, ſiue ad diuerſas: ſint autem ordinatim ductæ ad diametrum quidem EF recta AI, & ad diametrum GH recta AK: & ſit angulus AIE acutus maior acuto AKG. Dico diametrum EF axi AD propiorem eſſe quàm GH.



Productæ AI, AK ſectioni occurrant, hæc in M, illa in L: & ad axem applicentur EN, GO, LP, MR. Quoniam igitur AKG, hoc eſt MAR, angulus minor eſt angulo AIE, hoc eſt LAP: abſcindet recta AM maiorem ſectionis portionem, & maior erit quam AL: quare & MR maior erit quàm dimidia LP: ideoq; & eius dimidia, ſcilicet GO, maior erit quàm dimidia LP, hoc eſt EN. Ad AD igitur axem paraboles propiùs accedit EF diameter quàm GH.

Sit iam BAC ſectio hyperbola, cuius axis tranſuerſus AD, centrum E, & binæ diametri quæcunque EG, EF, ſiue ad eaſdem, ſiue ad diuerſas axis partes: ſintque ordinatim ductæ, ad EF diametrum recta AF, & ad EG diametrum recta AG: ſit autem angulus AFE acutus maior acuto AGE. Dico diametrum EF axi AD propiorem eſſe quàm EG: hoc eſt angulum AEF minorem eſſe angulo AEG.



productis

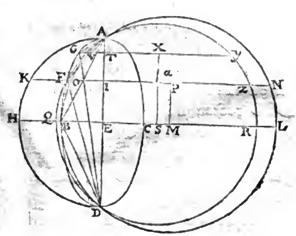
Productis enim ad ſectionem, A F quidem in H, & A G in I, iungantur D H, D I. Igitur, propter æquales A G, G I, Itemque A F, F H, rectamque A E rectæ E D æqualem, erit D I æquidiſtans E G, & D H, ęquidiſtans EF: ideoque & angulus AID æqualis erit angulo A G E, & angulus A H D angulo A F E: quare & angulus AHD angulo AID major erit. Ab iiſdem igitur rectę AD terminis binæ AH, DH rectæ ſibi inuicem occurrentes in H ſectionis puncto, ad eandem ſectionem verſus I punctum inclinatæ, & ipſis A I, D I rectis minores, intra triangulum AID concurrent, & ſingulos ADH & D A H angulos ſingulis A D I & D A I angulis minores efficient. Eſtque angulus A D H angulo A E F æqualis, vt & angulus A D I angulo A E G: igitur & angulus A E F angulo A E G minor erit: ideoque & diameter E F ad axem E A propiùs accedet quàm E G. Quod erat demonſtrandum.

Coroll.

Igitur Quæ in parabola & hyperbola ſimiles ducentur diametri, æqualiter ab axe remouebuntur: & conuerſim.

Theor. XIII. Prop. XV.

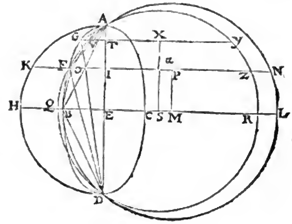
In omni ellipſi, quæ à majoris axis terminis ad idem ſectionis punctum binæ ducentur rectæ lineæ, angulum continebunt recto majorem: maximuſque omnium is erit qui ad mediam ſectionem fiet: eique propior ſemper remotiore maior erit. Quę autem à minoris axis terminis ducentur, minorem recto facient angulum: minimuſque omnium ad mediam fiet ſectionem: & ei propior remotiore ſemper minor erit.



Sit ellipſis B A C, cujus axis major A D, minor BC, centrum E: & ſumpto quolibet in ſectione puncto F, ducantur A F, D F: iunganturque A B, B D: ſumpto autem quolibet etiam alio, in ſectione A B, puncto G, quod à media ſectione B ſit remotius, quàm F, iungantur AG, D G. Dico ſingulos ABD, A F D, A G D angulos recto eſſe majores: omniumque eſſe

maximum ABD: &, qui ei propior factus eſt, AFD angulum remotiore AGD eſſe majorem.

Deſcribatur circa AD diametrum ſemicirculi circumferentia AHD quæ productum EB axem ſecet in H: ducaturque ad AD perpendicularis FI, quæ producta ad partes F ſemicirculi circumferentię occurrat in K: junctæque intelligantur AH, HD, AK, KD. Quoniam igitur AD major eſt quàm BC; erit & AE, hoc eſt HE maior quàm BE. Eſt autem angulus AHD rectus: quare obtuſus erit ABD angulus. Quoniam autem vt AE quadratum, ad EB quadratum, ita eſt AID rectangulum ad IF quadratum: & vt AE quadratum ad EH quadratum, ita eſt idem AID rectangulum ad IK quadratum, quadratumque HE quadrato BE majus eſt; erit & quadratum KI quadrato FI majus: rectaque KI major quàm FI. Quare & recto AKD angulo erit major AFD angulus. Similiterq; & recto major oſtendetur AGD angulus: Quare ſinguli ABD, AFD, AGD anguli recto erunt majores. Quod erat demonſtrandum.



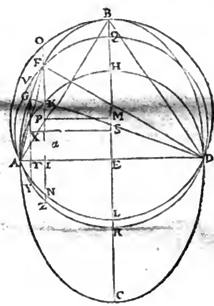
Deſcribatur nunc circa ABD triangulum circulus ABDL, cuius ſit BL diameter, & centrum M: productaque FI eiuſdem circumferentiæ occurrat in N, & O: ſitque ad FN perpendicularis MP: & ductæ intelligantur AO, OD. Major igitur eſt BM quàm OP: &, propter æquales EM, IP, erit & BE major quàm OI: majorque erit PI ad IO ratio, quàm ME ad EB: & componendo major erit PO ad IO, quàm MB ad EB: &, ſumptis antecedentium duplis, major NO ad IO ratio, quàm LB ad EB: Igitur diuidendo, major erit NI ad IO ratio, hoc eſt NIO, ſiue AID, rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm LEB, ſiue AED, rectanguli ad EB quadratum. Sed vt AEB rectangulum ad EB quadratum, ita eſt AID rectangulum ad IF quadratum: Major igitur erit AID rectanguli ad IO quadratum ratio, quàm ad IF quadratum: quare & IF major erit quàm IO: ideoque & punctum F extra circuli ABDL circumferentiam erit. Quare & obtuſus AFD angulus minor erit AOD, hoc eſt ABD, angulo. Quod 2° erat demonſtrandum.

Deſcripto autem circa AFD triangulum circulo AFQDR, cuius ſit diameter QR, & centrum S, ducatur ad AD rectam perpendicularis GT, circuli AFDR circumferentiæ occurrens in V & Y,

Digitized by Google

rectæque SX æquidiſtanti AD in X: in quo autem recta FN eandem AFDR circumferentiam ſecat, ſit punctum Z: & in quo rectam SX ſecat ſit punctum α ductæque etiam intelligantur AV, VD. Major igitur eſt Fα quàm VX: & propter Iα, TX æquales, minor erit TV quàm IF; ideoque & major erit XT ad TV ratio, quàm αI ad IF: componendoque major XV ad TV, quàm αF ad IF: &, ſumptis antecedentium duplis, major YV ad TV, quàm ZF ad IF: Quare, diuidendo, major erit YT ad TV, hoc eſt YTV, ſiue ATD, rectanguli ad TV quadratum, ratio, quàm ZIF, ſiue AID, rectanguli ad IF quadratum. Sed vt AID rectangulum ad IF quadratum, ita eſt ATD rectangulum ad TG quadratum: Major igitur erit ratio ATD rectanguli ad TV quadratum, quàm ad TG quadratum: Ideoque & minor erit TG quàm TV. Quare punctum G extra circuli AVFDR circumferentiam erit. Itaque & minor erit AGD angulus angulo AFD. Quod vltimò erat demonſtrandum.

Nec aliter, omnibus permutatis, abs minoris axis AD terminis inclinatæ ad ſectionem binæ DF, AF atq; etiam DG, AG lineæ minores recto probabuntur ſingulos continere DFA, DGA angulos: & omnium minimum eſſe DBA angulum qui ad mediam ſectionem fit: atque ei propiorem vt DFA angulum remotiore vt DGA etiam ſemper eſſe minorem.



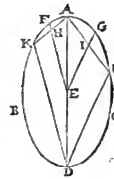
Coroll.

Hinc fit euidens Binorum punctorum in ellipſi ad quæ à maioris axis terminis inclinatæ lineæ angulos conſtituunt, illud à minori axe remotius eſſe, & alterutri maioris axis termino propius, in quo minor conſiſtit angulus. Et contrarium euenire inclinatis ad eadem ipſa ſectionis puncta ab vtroque minoris axis termino lineis.

THEOR. XIV. PROP. XVI.

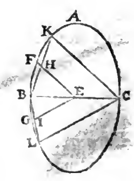
In omni ellipſi, binarum diametrorum illa maiori axi propior erit, ad quam ordinatæ ſub minore obtuſo angulo applicabuntur: & minori axi illa erit propior, ad quam ordinatæ ſub maiore acuto angulo ducentur.

Sit ellipſis quæcunque BAC, cujus axis primùm maior AD, centrum E, eiuſdemque binæ quælibet diametri EF, EG, ſiue ad eaſdem, ſiue ad diuerſas axis AD partes: ſitque ad EF diametrum ordinatim applicata AH, & ad EG diametrum ordinatim ducta AI: ſit autem angulus AHE minor angulo AIE. Dico EF diametrum axi ED propiorem eſſe, quàm EG: hoc eſt angulum AEF minorem eſſe angulo AEG.



Productis enim ad ſectionem, AH quidem in K, & AI in L: ductiſque DK, DL, erit DK æquidiſtans EF, & DL æquidiſtans EG, ideoque & angulus AKD angulo AHE erit ęqualis, & angulus ALD ęqualis angulo AIE: Minor igitur erit angulus AKD angulo ALD. Sed & vterque AKD, ALD angulus, ex anteced. erit obtuſus: &, ex eiuſdem coroll. punctum K propius erit axis termino A quàm punctum L: Erit igitur DK axi propior quàm DL: ideoque & angulus ADK, hoc eſt AEF, minor erit angulo ADL, hoc eſt AEG: & diameter EF axi AD propior erit quàm EG. Quod 1° erat demonſtrandum.

Sit jam ellipſis BAC minor axis BC, & centrum E, eiuſq; binę diametri EF, EG: ſitq; ad diametrum EF ordinatim ducta BH, & ad EG diametrum ducta ordinatim BI: atq; angulus BHE minor ſit angulo BIE. Dico diametrum EF ab axe BC remotiorem eſſe quàm EG.



Productis enim, vt ſupra, BH in K, & BI in L, ductiſque CK, CL, erit angulus BKC acutus minor acuto BLC: quare & punctum K remotius erit ab axis minoris termino B quàm punctum L: ideoque & angulus BCK, hoc eſt BEF, maior erit angulo BCL, hoc eſt BEG: Quare & diameter EF ab axe BC remotior erit quàm EG. Quod 2° erat demonſtrandum.

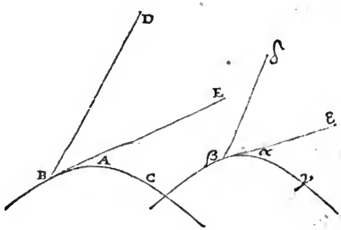
COROLL.

Hinc etiam, & hoc fit euidens. Similes diametros æqualiter ab vno eodemque ellipſeos axe remoueri & conuerſim.

THEOR. XV. PROP. XVII.

Si ſint binæ hyperbolæ, & vtrobique aſſumptæ cuilibet tranſuerſæ diametro contigua parameter ſit æqualis; erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binę hyperbolę BAC, $\beta\alpha\gamma$: ſitque hyperbolę BAC expoſita quælibet diameter tranſuerſa BD, & eidem contigua para-



meter BE: ſimiliter & hyperbolæ $\beta\alpha\gamma$ ſit aſſumpta quæcunque tranſuerſa diameter $\beta\delta$, eidemque contigua parameter $\beta\epsilon$: ſitque BD æqualis BE, & $\beta\delta$ æqualis $\beta\epsilon$. Dico hyperbolam $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ BAC eſſe ſimilem.

Quoniam enim in hyperbola BAC tranſuerſa BD diameter contiguæ BE parametro æqualis eſt; erunt, ex 13 huius, & omnes eiuſdem tranſuerſæ diametri ſuis contiguis parametris æquales: ideoque & axis tranſuerſus rectę parametro æqualis. Sed & eadem ratione erunt hyperbolæ $\beta\alpha\gamma$ tranſuerſæ omnes diametri contiguis ſuis parametris ęquales, atque ideo & tranſuerſus axis rectę parametro ęqualis: igitur ex 4 huius, erit altera alteri hyperbola ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Itaque, Si binæ hyperbolæ coniugatas diametros, tranſuerſam ſcilicet & ſecundam, æquales inuicem habeant vtrobique; erit etiam altera alteri hyperbola ſimilis.

tranſuerſam & ſecundam, ſiue conjugatas diametros in eadem ad inuicem ratione habeant, ſed non æqualiter vtrobique inuicem inclinatas, neq;, ſi ſint hyperbolæ, inuicem vtrobiq; æquales; non erit dictarum ſectionum altera alteri ſimilis.

MONITVM.

Vtique iam ex ſupra demonſtratis ſatis patet, quantum à vera ſimilium hyperbolarum aut ellipſium definitione abſint Apolloniana Eutocij vna, & bina Commandini ſimilium eiuſmodi ſectionum definitiones, quæ & binis etiam diſsimilibus hyperbolis, aut ellipſibus, quales in proxime antecedente tum Propoſitione, tum Corollario, ſunt propoſitæ, aptè conuenire poſsint. Quandoquidem ſi eiuſmodi diſsimiles hyperbolæ, ſiue ellipſes, figurarum latera, vel tranſuerſam & ſecundam conjugatas diametros, vtrobique in eadem ratione habeant; etiam & ſimiles diametri à vertice portiones ad conterminas ordinatim à ſectione applicatas, ideoq; ipſaſmet etiam applicatas ad inuicem eodem ordine ſumptas in eadem vtrobique ratione habebunt, vt ex 4 huius ibidem appoſitum Coroll. 3 certò pronunciauit. Quanquam igitur vtrobique ſit æquidiſtantium baſi, aut cuipiam ordinatim applicatæ, numero æqualium ad conterminas diametri portiones à vertice abſciſſas, atque etiam abſciſſarum ad inuicem eadem ratio; quæ Apollonij ſimilium Conicarum linearum, vel ſimilium Coni-ſectionum definitio eſt, ideoq; & vtrobique eadem ſit laterum figuræ ad inuicem ratio, atque etiam eadem vtrobique tranſuerſæ & ſecundæ diametrorum conjugatarum ad inuicem, quæ ſunt Commandini ambæ ſimilium hyperbolarum aut ellipſium definitiones: Nihilo tamen magis ſimiles dicentur binæ ſectiones aut portiones ab ijſdem conceſsis, niſi ſi angulorum ab ordinatim applicatis aut æquidiſtantibus vnius factorum cum alterius ſimiliter conſtitutis angulis, æqualitas etiam probetur: hoc eſt niſi factæ vtrobique ſectionis figuræ ſimiles ſint inuicem: aut propoſitæ ordinatim applicatæ ad ſimiles diametros vtrobique conſtituantur: veluti ſi expoſita vtrobique diameter etiam axis ſit. Quoniam autem, quod ſuprà notauimus, qualibet aſſumpta ſectionis diameter etiam principalis ejuſdem ſectionis diameter, ſiue diameter ex generatione, vel ex coni ſectione dici poſsit, facta ſcilicet ſaltem in cono ſcaleno ab aliquo plano non ad rectos baſi angulos ſecto: Idcirco & circa quamlibet diametrum

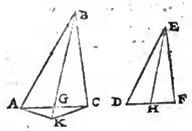
Digitized by Google

de earundem inuicem coni-ſectionum, atque etiam de ſimilium exanime & notitia generalis nobis viſa eſt inſtituenda tractatio. Cui nequaquam factura ſint ſatis neque Apolloniana, neque Commandini ambæ meritò à nobis damnatæ definitiones, quarum cauſſa huc vſque aliquantum digreſſi jam in viam redimus.

Lemma III. Prop. XIX.

Si ſint bina triangula ad verticem æquiangula, & rectâ vtrobique à vertice ad mediam baſim ductâ, ſint vnius anguli ad mediam baſim facti ſinguli ſingulis alterius trianguli angulis ad mediam baſim factis æquales; erit alterum alteri triangulum ſimile.

Sint bina triangula ABC, DEF, quorum verticales ad B & E anguli ſint inuicem æquales, ſectiſq; AC, DF baſibus bifariam, illa in G, hæc in H, ducantur BG, EH. Sit autem angulus BGC angulo EHF æqualis, vt & angulus BGA angulo EHD. Dico triangulum DEF triangulo ABC eſſe ſimile.



Producta enim BG in K, vt ſit AG ad GK, veluti EH ad HF, erit triangulum AGK triangulo EHF ſimile: & angulus AKG angulo EFH æqualis erit: vt autem CG ad GA, ita eſt FH ad HD; & vt AG ad GK, ita eſt EH ad HD: Igitur ex æquali, vt CG ad GK, ita erit EH ad HD. Et ſunt æquales ad G & H anguli: Triangulum igitur CGK triangulo EHD etiam ſimile erit: quare & CKG angulus angulo EDH, erit æqualis. Angulus igitur AKC, duobus EFD, EDF angulis erit æqualis: & additis æqualibus ABC, DEF angulis, erunt bini AKC, ABC tribus D, E, F angulis, hoc eſt duobus rectis æquales: quare & reliqui bini BAK, BCK anguli duobus etiam rectis æquales erunt: ideoque & A, B, K, C puncta in circuli circumferentia erunt: quare & angulus BAC, angulo BKC, hoc eſt angulo EDF æqualis erit: & angulus BCA angulo BKA, hoc eſt reliquo EFD angulo, etiam æqualis. Triangulum igitur DEF triangulo ABC ſimile erit. Quod erat demonſtrandum.

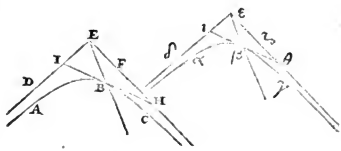
Theor.

Digitized by Google

Theor. XVII. Prop. XX.

Si binæ hyperbolæ æqualibus Aſymptoton angulis contineantur. Erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ ABC, $\alpha\beta\gamma$ quarum aſymptoti, vnius E D, F F, alterius $\epsilon\delta$, $\epsilon\zeta$: ſit autem angulus $\delta\epsilon\zeta$ angulo D E F æqualis. Dico hyperbolam $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC eſſe ſimilem.

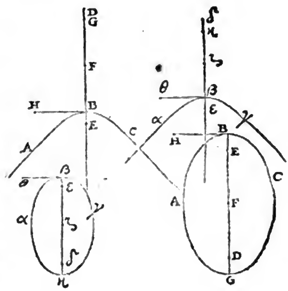


Exhibita enim hyperbolæ A B C diametro quacunq; EB, quæ ſectioni occurrat in B, ducatur per B ſectionem contingens recta I B H, vtraque aſymproto terminata in I & H. Inueniturque in hyperbola $\alpha\beta\gamma$ diameter ad quam ordinatæ in angulo ipſi E B H æquali applicentur, ſitque diameter eiuſmodi $\epsilon\beta$: ducaturq; recta $\iota\beta\theta$ ſectionem contingens in β. Erit igitur angulus $\epsilon\beta\theta$ angulo E B H æqualis. Ideoque & reliquus $\epsilon\beta\iota$ reliquo EBI æqualis. Quoniam autem recta IBH ſectionem contingit in B vtrinque aſymproto terminata; erit in eodem B puncto bifariam ſecta ex Coroll. 2 ad 39. primi huius. Eademq; ratione & recta $\iota\beta\theta$ bifariam erit ſecta in β. Suntque ſinguli in media baſe ad β punctum facti anguli ſingulis ad B in media baſe factis angulis æquales, & verticalis $\iota\epsilon\theta$ verticali IBH etiam æqualis: triangulum igitur $\iota\epsilon\theta$ triangulo IBH ſimile erit, ex antecedente. Quare vt E B ad B H, ita erit $\epsilon\beta$ ad $\beta\theta$, & vt E B quadratum ad B H quadratum, hoc eſt vt tranſuerſa ſectionis, ſiue hyperbolæ ABC, diameter, ſcilicet dupla E B, ad contiguam parametrum: ita erit $\epsilon\beta$ quadratum ad $\beta\theta$ quadratum, ſcilicet ita tranſuerſa hyperbolæ $\alpha\beta\gamma$ diameter, nempe dupla $\epsilon\beta$, ad contiguam parametrum. Et ſunt $\epsilon\beta$, EB ſimiles vtrobique diametri. Igitur, ex 4 huius, erit altera alteri hyperbola ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XVIII. PROP. XXI.

Si binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes, interceptas vtrobique axis portiones vtroque vmbilico & vertice in eadem inuicem ratione habuerint; erit altera alteri hyperbola, aut ellipſis, ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ, aut binæ ellipſes ABC $\alpha\beta\gamma$, quarum vertices B & β: Vmbilici vnius D, E, alterius, δ, ϵ: & ſit vt DB ad BE, ita $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$. Dico hyperbolam, aut ellipſim, $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ, aut ellipſi, ABC eſſe ſimilem.



Secetur enim vtraque DE, $\delta\epsilon$ bifariam, illa in F, hæc in ζ: erunt F & ζ puncta centra ſectionum. Sumptiſque FG æquali FB, atque etiam $\zeta\eta$ æquali $\zeta\beta$, erunt BG, $\beta\eta$ axes tranſuerſi, rectaq; GD rectæ BE æqualis, vt & recta $\delta\eta$, rectæ $\beta\epsilon$. Quoniam igitur vt DB ad BE, ita eſt $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: erit vt rectangulum DBE, hoc eſt GEB, ad quadratum BE, ita rectangulum $\delta\beta\epsilon$, ſiue $\eta\epsilon\beta$, ad quadratum $\beta\epsilon$, & antecedentium quadrupla. Rectangulo igitur quadruplo GEB ponatur æquale rectangulum GBH. Itemq; quadruplo $\eta\epsilon\beta$ rectangulo, fiat æquale rectangulum $\eta\beta\theta$. Quoniam quadranti figuræ ad GB axem tranſuerſum ſectionis ABC conſtitutæ, ęquale eſt rectangulum GEB, & recta GB tranſuerſum eſt figuræ latus; erit, ex conuerſ. 58 primi huius, & BH eiuſdem coefficiens, ſiue recta ſectionis parameter. Similiter & $\beta\theta$ recta erit ſectionis $\alpha\beta\gamma$ parameter, cuius ſit $\eta\beta$ tranſuerſus axis. Eritque rurſus vt rectangulum GBH ad BE quadratum, ita rectangulum $\eta\beta\theta$ ad quadratum $\beta\epsilon$. Ratio autem rectanguli GBH ad quadratum BE, compoſita eſt ex rationibus GB ad BE, & HB ad BE. Similiter & ratio rectanguli $\eta\beta\theta$ ad quadratum $\beta\epsilon$, compoſita eſt ex ratione $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$, & $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Sed quoniam vt DB ad BE, ita eſt $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: & in hyperbolis diuidendo, in ellipſibus autem componẽdo, vt GB ad BE, ita eſt $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$; ablatis æqualibus GB ad BE, & $\eta\beta$ ad $\beta\epsilon$ rationibus, eadem remanebit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ ratio, quæ BH ad BE. Ex æquali igitur

Digitized by Google

eadem erit $\beta\theta$ ad $\beta\eta$, rectæ ſcilicet parametri ſectionis $\alpha\beta\gamma$, ad tranſuerſum axem ratio, quę BH rectę parametri ſectionis A B C ad BG axem tráſuerſum. Quare, per 4 huius, erit hyperbola, vel ellipſis, $\beta\alpha\gamma$ hyperbolæ, vel ellipſi, BAC ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

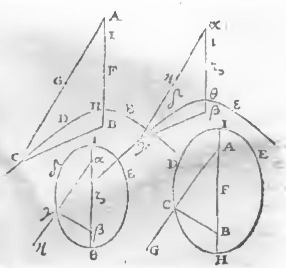
ALITER.

Abſque rationum compoſitione aut diuiſione.

Quoniam vt DB ad BE, ita eſt $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: erit in hyperbolis diuidendo, & in ellipſibus componendo, vt D B ad B G, ita $\delta\beta$ ad $\beta\eta$. Sumpta autem BH eiuſmodi, vt GBH rectangulum ſit rectanguli DBE, ſiue GEB quadruplum, & ſumpta $\beta\theta$ ita, vt rectangulum $\eta\beta\theta$ ſit etiam rectanguli $\delta\beta\epsilon$, ſiue $\eta\epsilon\beta$, quadruplum: cum ſit BG tranſuerſus axis; erit B H recta ſectionis parameter. Similiter & $\beta\theta$ recta ſectionis erit parameter. eritq; vtrobiq; vt DB ad BG, ita BH ad BE 4. Et vt $\delta\beta$ ad $\beta\eta$, ita $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ 4. Sed iam oſtenſum eſt vt DB ad BG, ita eſſe $\delta\beta$ ad $\beta\eta$. Igitur vt BH ad BE 4, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ 4. Et vt BH ad B E, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Sed rurſus quoniam vt DB ad BE, ita eſt $\delta\beta$ ad $\beta\epsilon$: & in hyperbola diuidendo, aut in ellipſi componendo, vt BG ad B E, ita eſt $\beta\eta$ ad $\beta\epsilon$: ex æquali vt BH ad BG, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\eta$. vtrobique ſcilicet eadem rectæ parametri ad tranſuerſum axem ratio. Quare, per 4 huius, erit altera alteri ſectio ſimilis.

THEOR. XIX. PROP. XXII.

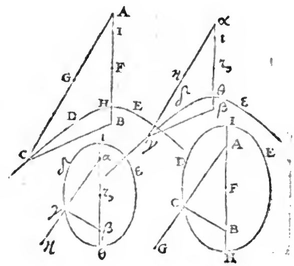
Si binorum ſimilium triangulorum bina homologa latera ponantur hyperbolarum aut ellipſium axes vtriſque vmbilicis intercepti, & vtrobique angulus præaſſumpto lateri oppoſitus à ſectionis linea vel diuidi intelligatur, vel tangi; erit binarum huiuſmodi hyperbolarum, vel ellipſium, altera alteri ſimilis.



Satis autem conſtat pro binis hyperbolis propoſita bina triangula non debere eſſe æquilatera. Neque, ſi iſoſcelia ſint, baſes ipſorum deputari debere hyperbolarum axibus.

Sint bina triangula ſimilia ABC, $\alpha\beta\gamma$, quorum homologa latera AB, $\alpha\beta$ reputentur hyperbolarum aut ellipſium axes, vtriſque vmbilicis qui ſint A, B, & α, β, intercepti: ſecet autem vel contingat angulum ACB ſectionis linea,

vt & altera ſectionis linea angulum $\alpha\gamma\beta$: & ſint eiuſmodi ſectiones CDE, $\gamma\delta\varepsilon$, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſes. Dico $\gamma\delta\varepsilon$ hyperbolam, ſiue ellipſim, hyperpolæ, ſiue ellipſi, CDE eſſe ſimilem.

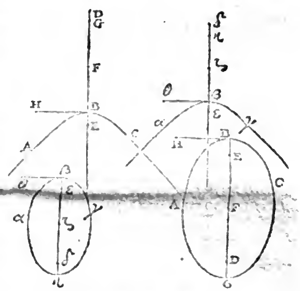


Secetur vtraque AB, $\alpha\beta$, bifariam illa in F, hęc in ζ: & à maiori AC rectę CB ęqualis pro hyperbola ſecetur, aut eidem pro ellipſi apponatur CG: ſimiliterque à maiori $\alpha\beta$, minori $\gamma\beta$ æqualis ſecetur, aut eidem apponatur $\gamma\eta$: reſiduæque pro hyperbola, aut pro ellipſi compoſitæ AG dimidio æquales ſumantur, vtrinque ab F, rectæ FH, FI: ſimiliter & reſiduæ, vel compoſitæ $\alpha\eta$ æquales ſumantur $\zeta\theta$, $\zeta\iota$: eruntque rurſus pro hyperbola reſiduæ, vel pro ellipſi additæ AI, HB, rectæ inuicem æquales. Similiter & reſiduæ vel additæ $\alpha\iota$, $\theta\beta$, erunt æquales inuicem. Atqui poſitis A & B vmbilicis, & C puncto in ſectione, manifeſtum eſt maiorem AC pro hyperbola ſuperare debere minorem CB quantitate tranſuerſi axis, & pro ellipſi ambas AC, CB ſimul maiori axi debere eſſe æquales: hoc enim è 51 primi huius conſtat: quare vtroq; caſu erit reſidua vel compoſita AG tranſuerſo axi æqualis: ſimiliterque & reſidua vel compoſita $\alpha\eta$ tranſuerſo axi æqualis erit. Eſt autem ipſi AG æqualis HI, & rectę $\alpha\eta$ æqualis $\theta\iota$: quare & ipſæ HI, $\theta\iota$ ſectionum erunt tranſuerſi axes, & puncta H, I, vt & θ, ι earundem vertices qui in hyperbolis dicuntur contrapoſiti. Quoniam autem vt AB ad BC, hoc eſt ad CG, ita eſt $\alpha\beta$ ad $\beta\gamma$, ſiue ad $\gamma\eta$: & vt AB ad AC, ita etiam eſt $\alpha\beta$ ad $\alpha\gamma$: vt AB ad AG hoc eſt HI, ita erit $\alpha\beta$ ad $\alpha\eta$, ſiue ad $\theta\iota$: & diuidendo vt AB ad vtramque AI, BH, ita erit $\alpha\beta$, ad vtramq; $\alpha\iota$, $\beta\theta$: ſumptiſque conſequentium dimidiis, & in hyperbolis diuidendo, in ellipſibus autem componendo, vt AH ad HB, ita erit $\alpha\theta$ ad $\theta\beta$, & ſunt ſectionum CDE, $\gamma\delta\varepsilon$, vertices H, θ: & vmbilici A & B: itemque α & β. Quare, ex anteced. erit altera alteri ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, eadem. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XX. PROP. XXIII.

Si in binis hyperbolis, aut binis ellipſibus, eadem fuerit vtrobique rectæ parametri ad axis partem vertice, & homologo vmbilico interceptam ratio; erit altera alteri hyperbola, vel ellipſis, ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ, vel binæ ellipſes, ABC, $\alpha\beta\gamma$, quarum vertices B & β: ſitque recta parameter vnius BH, & eiuſdem à foco proximo diſtantia BE. Similiterque recta alterius parameter ſit $\beta\theta$, focique proximi diſtantia $\beta\epsilon$: vt autem BH ad BE, ita ſit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Dico hyperbolam, ſiue ellipſim, $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ, ſiue ellipſi, ABC eſſe ſimilem.



Exponatur vtrobiq; tranſuerſus axis, & in eo focus remotus, ſitque ſectionis ABC tranſuerſus axis BG, & focus remotus D: & ſectionis $\alpha\beta\gamma$ ſit tranſuerſus axis $\beta\kappa$, focuſque remotus δ. Igitur quoniam, ex definit. & 58 primi huius, quadranti figuræ, ſeu rectanguli ſub GB, BH, æquale eſt rectangulum GEB, ſiue DBE: ſimiliter & quadranti rectanguli $\kappa\beta$, $\beta\theta$ æquale eſt rectangulum $\kappa\epsilon\beta$, ſiue $\delta\beta\epsilon$; vt DB ad GB, ita erit BH quadrans ad BE: & ita BH ad BE quadruplam. Similiter vt $\delta\beta$ ad $\kappa\beta$, ita erit $\beta\theta$ quadrans ad $\beta\epsilon$: & ita $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ quadruplam. Sed vt BH ad BE, ita eſt $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$. Igitur eſt vt BH ad BE quadruplam, ita erit $\beta\theta$ ad $\beta\epsilon$ quadruplam. Ideoque vt DB ad GB, ita etiam erit $\delta\beta$ ad $\kappa\beta$. Et diuidendo vt DB ad DG, ſiue BF, ita erit $\delta\beta$ ad $\delta\kappa$, ſiue $\beta\epsilon$. Suntq; D, E, itemque δ, ϵ vmbilici, & vertices ζ, β. Igitur, ex 20 huius, erit propoſitarum ſectionum altera alteri ſimilis. Quod erat demonſtrandum.

MONITVM.

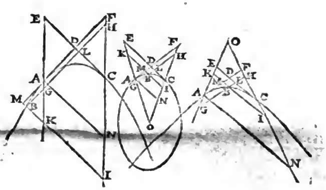
Equidem ſæpiſsimè euenire poteſt vt per data aliquot in plano puncta coni ſectio aliqua vel deſcribenda ſit, vel ſaltem, quaſi ſit deſcripta, nomine & ſpecie proponatur dignoſcenda: veluti ſi per aliquot vmbrarum terminos in pla-

no aliquo vno eodemque die notatos eiuſdem diei quiſpiam Parallelum à Sole deſcriptum in eodem plano deſcribere & repræſentare velit: vel ſaltem ex iiſdem, aut ſimilibus, notatis terminis nomen ſectionis & ſpeciem determinare, vt eidem ſimilem aliam vbilibet per datos totidem terminos in plano ſimiliter ad inuicem conſtitutos exhibere valeat. Idque nunc primùm nobis occurrit meditari, & notandum ac diſcutiendum ſuſcipere. Dum adhuc igitur circa ſimilium coni ſectionum agri culturam verſamur, ab eodem alioqui breui receſſuri, & vomerem educturi, eidem conterminum hunc agellum priùs hìc findere, & aliquot inſignes glebas ibidem vertere libuit: ne ſi non omninò proprium hìc locum habuiſſe, ſaltem non minùs quàm alibi deinceps in toto hoc opere incommodum ſibi vindicare potuiſſe ſpecialem hanc, ſed maximè vtilem, nec iniucundam per data puncta deſcribendarum, aut ſaltem dignoſcendarum coni ſectionum diſquiſitionem conqueri quis meritò poſſit. Quoniam autem non quotlibet puncta ſimiliter, totidemque vtrobique poſita vtramque per eadem ductam ſectionem ſemper nomine & ſpecie efficiunt cognitam; Idcircò nobis inquirendum duximus quot plurima ſimiliter vtrobiq; puncta poſita ſimilitudinem ſectionum per eadem ductarum aut ducendarum euincant. Vnde tandem etiam tutò licebit per data quinque puncta aptè propoſita vnamquamq; ſectionem primùm determinare, deinde deſcribere. Quamquam & per data tantùm quatuor bina ſitu & quantitate differentes notæ fiant, ideoq; & deſcribi poſſint parabolæ. Illud idem de vnica ellipſi per quinque puncta deſcribenda non ſatis cautè propoſuit olim, quamquam via analytiqua rectè explicuit, ſed operosè nimis conſtruendum reliquit Pappus lib. 8. Mathem. Collect. Siquidem per data quinque puncta aliqua ſola deſcribetur parabola, per alia quinque ſola hyperbola, per quinque alia; ſola ellipſis, & per totidem alia, ſola circuli circumferentia. Quod ex ſequentibus fiet manifeſtum.

Digitized by Google

THEOR. XXI. PROP. XXIV.

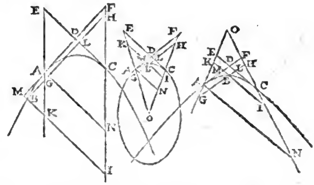
Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurrentes, & à quolibet in ſectione puncto rectæ contingentibus æquidiſtantes ducantur donec diametris per tactus ductis occurrant; erunt vtrobique triangula à diametris & contingentibus facta inuicem æqualia: atq; etiam quadrilatera vtrobique inter ſectionem & diametrum conſtituta triangulis reciprocè ab æquidiſtantibus factis æqualia.



Sit coni ſectio, vel circuli circumferentia, ABC, quam in A & C binæ contingant lineæ AD, CD inuicem occurrentes in D: ſintque diametri per tactus ductæ AE, CF: productaque AD occurrat diametro CF in F: & CD producta occurrat AE diametro in E. Sumpto autem quolibet B puncto in ſectione, ducantur GBH æquidiſtans AD, diametriſque occurrens in G & H, & contingenti CD in L, & IBK æquidiſtans CD, occurrenſque diametris in I & K, & contingenti AD in M. Dico tam triangulum CDF triangulo ADE ęquale eſſe, quam quadrilaterum BMFH triangulo AMK, atque etiam quadrilaterum BLEK, exceſſum ſcilicet trianguli GLE ſupra triangulum GBK, triangulo CLH eſſe ęquale.

Ducatur ab alterutro tactus puncto, vt A, ad oppoſitam diametrum recta AN oppoſitæ contingenti ęquidiſtans. Et, ſi quidem diametri AE, CF inuicem concurrunt, ſit concurſus in O. Quoniam igitur in parabola, vt in 28 primi huius demonſtratum eſt, triangulo AFN ęquale eſt parallelogrammum EN: ablato communi ADCN quadrilatero, erit reliquum ADE triangulum reliquo CDF triangulo æquale. In hyperbola autem & ellipſi, veluti in circuli circumferentia, quemadmodum iam in 29 primi huius iam demonſtratum eſt, quoniam vt NO quadratum ad OC quadratum, hoc eſt, vt NAO triangulum ad triangulum CEO, ita eſt NO ad OF, hoc eſt, ita NAO triangulum ad FAO triangulum: erit triangulum AFO triangulo CEO æquale: quare ablato communi

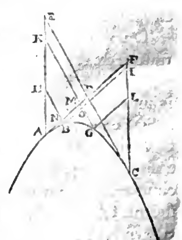
quadrilatero FDEO, erit reliquum CDF triangulum reliquo ADE triangulo æquale. Quod 1° erat demonſtrandum.



Quoniam autem, vt in ijſdem 28 & 29 primi huius iam oſtenſum eſt etiam, triangulo GBK æquale eſt quadrilaterum GAFH: communi ablato vel addito GAMB quadrilatero, erit reliquum aut compoſitum BMFH quadrilaterum, reliquo aut compoſito AMK triangulo æquale. Similiter & propter quadrilaterum ICEK triangulo IBH æquale, ablato communi ICLB quadrilatero, erit reliquum BLEK quadrilaterum reliquo CLH triangulo æquale. Vel etiam, vt in aliquo caſu, ablato communi quinquelatero IKGLC, erit reliquum GLE triangulum duobus BGK, CLH triangulis ſimul æquale. Quare & quadrilaterum BLEK, exceſſus ſcilicet trianguli GLE ſupra BGK triangulum, reliquo CLH triangulo æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXII. PROP. XXV.

Si coni ſectionem, vel circuli circumferentiam, binæ contingant lineæ inuicem occurrentes, & à binis quibuſlibet in ſectione punctis ad vtraſque diametros per tactus ductas rectæ contingentibus æquidiſtantes vtrobique ducantur; erunt vtrobique ab æquidiſtantibus ad diametrum conſtituta quadrilatera inuicem æqualia.



Sit coni ſectio, vel etiam circuli circumferentia ABC, quam contingant in A & C binæ rectæ AD, CD inuicem occurrentes in D: ſintque diametri AE, CF, quibus occurrant AD in F, & CD in E: ſumptis autem binis quibuſlibet in ſectione punctis B & G, ducantur vtriſque AD, CD contingentibus æquidiſtantes BH, BI, itemque GK, GL: ſitque illarum occurſus in O. Dico quadrilaterum GOIL quadrilatero BOKH eſſe æquale.

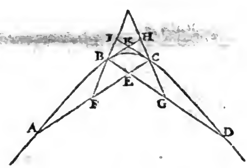
In quo GK ſecat AD, ſit punctum M: & in quo eandem ſecat BH, ſit punctum N. In quo autem ſe inuicem

ſecant

ſecant BI, GK, ſit punctum O. Igitur, ex anteced. triangulo AMK æquale eſt quadrilaterum MGLF, & triangulo ANH æquale quadrilaterum NBIF. Ambo igitur BK & BF quadrilatera vni MGLF quadrilatero ſunt æqualia. Commune auferatur MOIF quadrilaterum. Reliquum igitur GOIL quadrilaterum reliquo BOKH quadrilatero erit æquale. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XXIIII. Prop. XXVI.

Si in coni ſectione, vel circuli circumferentia, binæ rectæ inuicem ſeſe ſecantes ducantur; vt erunt contingentium ipſis æquidiſtantium, vtrobique à tactu ad communem occurſum ſumptarum, quadrata inuicem: ita erunt ſub reſpondentium intra ſectionem ductarum ſegmentis rectangula inuicem.



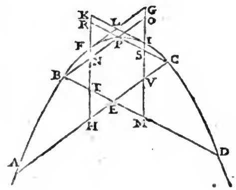
Sit coni ſectio, aut etiam circuli circumferentia ABC, & in ipſa binæ AC, BD rectæ ſeſe inuicem ſecantes in E. Sectionem autem contingat primùm in B, recta BH æquidiſtans AC: ſimiliter & in C contingat ſectionem recta CI æquidiſtans BD, contingentique BH occurrens in K. Dico vt quadratum BK ad quadratum CK, ita eſſe rectangulum AEC ad rectangulum BED.

Ducantur per tactus B & C, diametri IBF, HCG contingentibus occurrentes in H & I. Et rectis AC, BD in F & G.

Quoniam igitur vt BK quadratum ad triangulum BKI, ita eſt totum FC quadratum ad totum FCI triangulum: & ita ablatum FE quadratum ad ablatum FEB triangulum: atque etiam ita reliquum AEC rectangulum ad reliquum ECIB quadrilaterum; Et vt CK quadratum ad CKH triangulum, hoc eſt, ex 24 huius, ad triangulum BKI, ita eſt totum GB quadratum ad totum GBH triangulum: & ita ablatum GE quadratum ad ablatum GEC triangulum: atque etiam ita reliquum BED rectangulum ad reliquum EBHC, hoc eſt ECIB quadrilaterum; Erit, ex æquali, vt BK quadratum ad CK quadratum, ita rectangulum AEC ad rectangulum BED. Quod 1o. erat demonſtrandum.

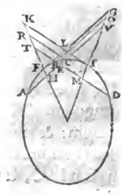
At ſi contactus puncta non etiam ſint in ſectione ductarum termini, vt in 2a figura. Ducantur ipſis AC, BD æquidiſtantes FG, IK

ſectionem contingentes in F & I, ſibique inuicem occurrentes in L. Ducantur etiam diametri KFH, GIM occurrentes contingentibus in G & K, & ipſis AC, BD rectis in H & M. A punctis autem B & C ipſis AC, BD rurſus æquidiſtantes ducantur BO, CR diametris occurrentes, BO quidem in N & O, & CR in S & R. Sitque ambarum occurſus in vno P ſectionis puncto. Et in quo diameter FH ſecat BD ſit punctum T, in quo autem IM diameter ſecat AC ſit punctum V. Oſtendendum eſt igitur vt FL quadratum ad IL quadratum, ita eſſe rectangulum AEC ad rectangulum BED.



Quoniam enim rurſus vt FL quadratum, ad triangulum FLK, ita eſt totum HC quadratum ad totum HCR triangulum: & ita ablatum HE quadratum ad ablatum HET triangulum: & ita reliquum AEC rectangulum ad reliquum ECRT quadrilaterum; Et vt IL quadratum ad triangulum ILG, hoc eſt FLK, ita eſt totum MB quadratum ad totum MBO triangulum: & ita ablatum ME quadratum ad ablatum MEV triangulum: atque adhuc ita reliquum BED rectangulum ad reliquum EBOV quadrilaterum; Cum ſit quadrilaterum EBOV quadrilatero ECRT æquale, propter æqualia invicem, ex 28 & 29 primi huius, bina BTN, NPR, atque etiam bina CVS, SPO triangula, & communem ETNPSV ſex laterum figuram; Erit etiam rurſus ex æquali vt FL quadratum ad IL quadratum: ita AEC rectangulum ad rectangulum BED. Quod 2° erat demonſtrandum.

Habeant autem abs terminis interſectarum ductæ contingentibus æquidiſtantes ſingularia in ſectione puncta vt in 3ª fig. Eodem modo oſtendetur, vt IL quadratum ad ILG triangulum, ita eſſe rectangulum BED ad quadrilaterum EBOV: & vt FL quadratum ad FLK, hoc eſt ILG triangulum, ita eſſe rectangulum AEC ad quadrilaterum ECRT. Sed propter æqualia ex anteced. CO, BR quadrilatera, & commune BC quadrilaterum, erunt EBOV, ECRT quadrilatera inuicem æqualia. Idcirco adhuc, ex æquali, vt FL quadratum ad IL quadratum, ita erit AEC rectangulum ad BED rectangulum. Quod 3° erat demonſtrandum.



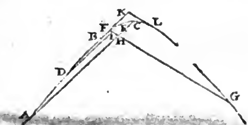
Nec ſecus in reliquis caſibus penè innumeris, pro varijs rectarum

AC, BD poſitionibus ad inuicem, procedet demonſtratio per æqualia ſemper & vtrobique ſiue ablatiua, ſiue additiua ad communem aliquam figuram triangula aut quadrilatera. Quare omnino conſtat propoſitum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIV. PROP. XXVII.

Si in coni ſectione, veluti & in circuli circumferentia, binæ rectæ æquidiſtantes inuicem ducantur, quas ſecet recta aliqua etiam in ſectione ducta; erunt ſub æquidiſtantium ſegmentis facta rectangula inuicem vt reſpondentia ſub ſecantis ſegmentis rectangula inuicem.

Sit coni ſectio, aut etiam circuli circumferentia ABC, & in ipſa binæ æquidiſtantes ductæ AC, DE quas ſecet FG intra ſectionem ducta in H & I. Dico vt rectãgulum AHC ad rectangulum DIE. ita eſſe FHG rectangulum ad rectangulum FIG.



Ducatur ipſis AC, DE æquidiſtans BK ſectionem contingens in B: ducaturq; LK æquidiſtans FG, ſectionemque contingens in L. Sitque contingentium BK, LK occurſus in K. Igitur, ex anteced. vt BK quadratum ad LK quadratum, ita erit rectangulum AHC ad rectangulum FHG: ſed & ita etiam rectangulum DIE ad rectangulum FIG. Igitur permutando vt rectangulum AHC ad rectangulum DIE, ita erit rectangulum FHG ad rectangulum FIG. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

Igitur, Si binarum quarumcunque rectarum terminatarum inuicem ſe ſecantium, ideoque & bina rectangula conſtituentium, alterutri à ſumpto quolibet alio puncto ducatur æquidiſtans quæ alteram ſecet: & ad ſectionis punctum conſtituat bina rectangula in eadem inuicem ratione in qua primùm facta rectangula ſimiliter ſumpta inuicem, & permutatim; erunt ductarum termini omnes in eadem aliqua coni ſectione.

MONITVM.

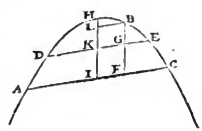
Hoc poſtremum theorema propoſitum generalem meruit

Digitized by Google

demonſtrationem. Parabola tamen & circuli circumferentia ſuas habent ſpeciales & proprias, circuli quidem circumferentia ſuam ab æqualitate rectangulorum ſub conterminis ſegmentis. At parabola ſuam à propriis aliis mediis deductam. Illam etiam hic adnectere non iniucundum fore exiſtimauimus cum ipſis medijs, tum ob inſignem eorum circa parabolica ſiue theoremata ſiue problemata vtilitatem, tum quod ipſorum vnum quodlibet ad ſequentia ſatìs aptum & commodè aſſumi poſſe nobis viſum eſt.

THEOR. XXV. PROP. XXVIII.

Si in parabola binæ æquidiſtantes rectæ ducantur quas ſecet ducta ab aliquo in ſectione puncto recta diametro æquidiſtans; erunt ſub æquidiſtantium ſegmentis facta rectangula inuicem, veluti portiones rectæ ad ipſas ductæ à ſectione ſimiliter ſumptæ inuicem.



Sit parabola ABC, & in ipſa binæ AC, DE inuicem æquidiſtantes: à ſumpto autem quolibet in ſectione puncto B, ducatur DF diametro æquidiſtans, quæ occurrat AC in F, & ſecet DE in G. Dico vt BF ad BG, ita eſſe AFC rectangulum ad DGE rectangulum.

Si quidem enim BF diameter eſt, iam conſtat propoſitum.

Sin autem; Secetur vtraque AC, DE biſariam, illa in L, hæc in K & iuncta IK producatur ad ſectionem in H. Erit igitur HI diameter. Ducatur ad ipſam recta BL æquidiſtans AC. Igitur vt HI ad HL, ita eſt quadratum IC ad quadratum LB: & diuidendo vt IL, hoc eſt BF, ad HL, ita eſt AFC rectangulum ad BL quadratum. Similiter vt HK ad HL, ita eſt quadratum KE ad LB, ſiue KG, quadratum. Et diuidendo vt KL, hoc eſt BG, ad HL, ita eſt rectangulum DGE ad quadratum LB. Igitur ex æquali vt BF ad BG, ita erit rectangulum AFC ad rectangulum DGE. Quod erat demonſtrandum.

COROLL.

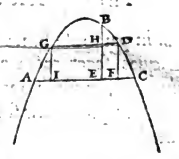
Hinc fit manifeſtum ſi rectangula ſub partibus æquidiſtantium in ſectione ductarum à qualibet recta ad ipſas à ſectione

ſectione ducta, quæ ſit diametro æquidiſtans, factis ſunt inuicem veluti rectæ diametro æquidiſtantis portiones à ſectione ſimiliter ſumptæ inuicem; Eiuſmodi ſectionem eſſe parabolam. Atque etiam ſi in binas æquidiſtantes rectas terminatas recta quæpiam à quolibet puncto ducatur ei quæ æquidiſtantes bifariam diuidit æquidiſtans, facienſque portiones eodem puncto & vtraq; æquidiſtante interceptas in eadem inuicem ratione in qua rectangula ſub æquidiſtantium ſegmentis facta inuicem ſimiliter ſumpta; Aſſumptum punctum in eadem cum æquidiſtantium terminis parabola eſſe.

Theor. XXVI. Prop. XXIX.

Si in parabola recta quæpiam ducatur ad quam à duobus in ſectione punctis binæ rectæ ducantur diametro æquidiſtantes; Erunt ſub ſegmentis in primùm ducta factis rectangula inuicem, veluti ipſæ æquidiſtantes ſimiliter ſumptæ inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipſa ducta AC. A ſumptis autem binis quibuſlibet in ſectione punctis B, & D ducantur binæ BE, DF rectæ diametro æquidiſtantes. Dico vt BE ad DF, ita eſſe rectangulum AEC ad rectangulum AFC.

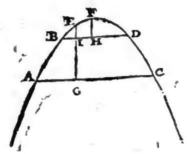


Ducatur intra ſectionem recta DG æquidiſtans AC, ſecanſq; BE in H: ducaturq; GI æquidiſtans BE. Igitur, ex antecedente, vt BE ad BH, ita eſt rectangulum AEC, ad rectangulum GHD, hoc eſt IEF. Quare diuidendo vt BE ad HE, hoc eſt DF, ita erit rectangulum AEC ad rectangulum AFC. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXVII. PROP. XXX.

Si in parabola binæ æquidiſtantes rectæ ducantur ad quas ſingulas à binis quibuſlibet in ſectione punctis ſingulæ ducantur lineæ diametro æquidiſtantes; erunt ſub ſegmentis æquidiſtantium facta rectangula inuicem, veluti rectę à ſectione ad ipſas ductæ inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipſa binæ rectæ æquidiſtantes AC, BD, ad quas à binis quibuſlibet E, & F punctis ducantur binæ EG, FH diametro æquidiſtantes. Dico vt EG ad FH, ita eſſe rectangulum AGC, ad rectangulum BHD.

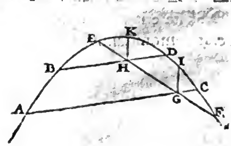


Secet enim alterutra EG, aut FH, ſaltem producta, rectam BD in I, rectæ AC occurrens in G. Igitur, ex 28 huius, vt EG ad EI, ita erit rectangulum AGC, ad rectangulum BID. Sed, ex antecedente, vt EI ad FH, ita eſt BID rectangulum ad rectangulum BHD. Igitur, ex æquali, vt EG ad FH, ita erit rectangulum AGC ad rectangulum BHD. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXVIII. PROP. XXXI.

Si in parabola binæ rectæ æquidiſtantes inuicem ducantur quas ſecet recta aliqua etiam intra ſectionem ducta; erunt ſub æquidiſtantium ſegmentis facta rectangula inuicem, vt reſpondentia ſub ſecantis ſegmentis rectangula inuicem.

Sit parabola ABC, & in ipſa binæ æquidiſtantes ductæ AC, BD, quas ſecet EF intra ſectionem ducta in G & H. Dico vt rectangulum AGC ad rectangulum BHD, ita eſſe rectangulum EGF ad rectangulum EHF.



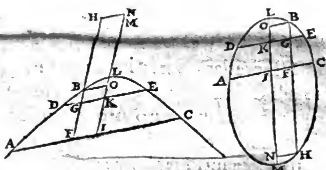
Educantur enim ad ſectionem diametro æquidiſtantes GI, HK. Igitur, ex antecedente, vt GI ad HK, ita eſt rectangulum AGC ad rectangulum BHD. Sed, ex 29. huius, vt GI ad HK, ita eſt rectangulum EGF ad rectangulum EHF.

Igitur vt AGC rectangulum ad rectangulum BID, ita erit EGF rectangulum ad EHF rectangulum. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXIX. PROP. XXXII.

Si in hyperbola, velut & in ellypſi, atque in circuli circumferentia, binæ rectæ æquidiſtantes inuicem ducantur, quas ſecet ducta ab aliquo in ſectione puncto recta diametro eaſdem bifariam diuidenti ęquidiſtans, & ad oppoſitam ſectionem perducta; vt erunt rectangula ſub æquidiſtantium ſegmentis facta inuicem, ita erunt rectangula ſub æquidiſtantis diametro partibus vtrâque ſectarum ęquidiſtantium, & vtroque in ſectione termino interceptis, ſimiliter ſumpta inuicem.

Sit hyperbola, veluti & ellipſis, aut etiam circuli circumferentia, ABC, & in ipſa binæ AC, DE æquidiſtantes inuicem. A ſumpto autem quolibet in ſectione puncto B, ducatur BF diametro rectas AC, DE bifariam diuidenti æquidiſtans (niſi ſi ipſa DF ſit diameter) quę rectam AC diuidat in F, rectamque DE ſecet in G, & producta ſectioni (quæ, in hyperbola, oppoſita dicitur) occurrat in H. Dico vt rectangulum AFC ad rectangulum DGE, ita eſſe rectangulum HFB ad rectangulum HGB. Hoc autem in ellipſi, vt & in circuli circumferentia, iam conſtat ex demonſtratis in 27. huius. In hyperbola autem idem ſic oſtendetur.



Si quidem BF diameter eſt, iam conſtat propoſitum.

Sin autem; Sectis AC, DE bifariam in I & K, iungatur IK, & producatur donec oppoſitis verticibus occurrat in L & M, & rectis HN, BO æquidiſtantibus AC in N, & O. Igitur cum ſit vt MKL rectangulum ad KE quadratum, ita MOL rectangulum ad OB ſiue KG quadratum, ſcilicet vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; ita etiam erit reliquum NKO, ſiue HGB rectangulum ad reliquum DGE rectangulum. Similiter cum ſit vt totum MIL rectangulum ad totum IC quadratum, ita ablatum MOL rectangulum ad ablatum OB, ſiue IF quadratum; & ita etiam reliquum

NIO, ſiue HFB rectangulum ad reliquum AFC rectangulum; Vt rectangulum AFC, ad rectangulum HFB, ita erit rectangulum DGE ad rectangulum HGB. Et permutando vt AFC rectangulum ad DGE rectangulum, ita erit HFB rectangulum ad rectanlum HGB. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. I.

Itaque, Si propoſitis quatuor veluti A, D, E, C punctis, quorum bina AC, DE, rectę ęquidiſtantes iungant, per quodlibet aliud punctum B ducatur HBGF recta ipſas AC, DE ęquidiſtantes biſecanti, vt IK, ęquidiſtans, facienſq; rectangula HFB, HGB inuicem veluti AFC, DGE rectangula inuicem; certò concludetur, & eadem via, ſed retrograda, demonſtrabitur puncta H, B in eadem per A,D,E,C ſectione, ſiue hyperbola, ſiue ellypſi, vel etiam circuli circumferentia, eſſe.

Coroll. II.

Hinc etiam patet in propoſitis ſectionibus, veluti & in circuli circumferentia, rectangulum ſub partibus cuiuſlibet ęquidiſtantis diametro vtroque in ſectione termino, & recta intra ſectionem ducta interceptis ad rectangulum ſub partibus rectę intra ſectionem ductę, ſe habere veluti tranſuerſa ſectionis diameter ad contiguam parametrum. Oſtenſum eſt enim rectangulum HGB ad rectangulum DGE ſe habere veluti rectangulum MKL ad KE quadratum; & rectangulum HFB ad rectangulum AFC eſſe vt rectangulum MIL ad quadratum IC, hoc eſt vtrobique vt tranſuerſa ſectionis diameter ad contiguam parametrum.

Coroll. III.

Atque etiam fit manifeſtum, ſi maior ſit rectangulorum ſub partibus ęquidiſtantium in ſectione ductarum à qualibet recta à ſectione ad ipſas ducta, quę diameter ſit, aut diametro ęquidiſtans, factis, maioris ſcilicet ad minus, ratio quam diametri aut diametro ęquidiſtantis portionum à ſectione ſimiliter ſumptarum ad inuicem; eiuſmodi ſectionem

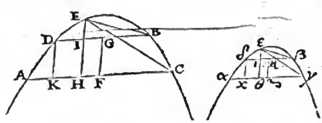
Digitized by Google

nem hyperbolam eſſe. Et contra, ſi minor ſit ſub ęquidiſtantium partibus maioris rectanguli ad minus ratio, quàm portionum diametri,aut diametro ęquidiſtantis, à ſectione ſimiliter ſumptarum ad inuicem, ſectionem eiuſmodi aut ellipſim eſſe,aut circuli circumferentiam.Siquidem, in hyperbola, vt HFB rectangulum ad rectangulum HGB, ita eſt rectangulum AFC ad rectangulum DGB. Sed minor eſt ratio BF ad BG, hoc eſt BFH rectanguli ad BG,FH rectangulum, quàm rectanguli BFH ad rectangulum BGH: nam & GH minor eſt quàm FH. Igitur maior erit rectanguli AFC ad rectangugulum DGE ratio, quàm rectę BF ad rectam BG. Hoc autem in ellipſi, veluti & in circuli circumferentia,contrario modo ſe habet.Siquidem illic GH maior eſt quàm FH.

THEOR. XXIX. PROP. XXXIII.

Si ſint binę coni ſectiones, & vtrobique quina in ſectione puncta notata: ſint autem vnius puncta ad inuicem ſimiliter poſita alterius punctis ad inuicem; erit altera alteri ſectio ſimilis.

Sint binæ coni ſectiones ABC, $\alpha\beta\gamma$, ſintque in ſectione ABC notata quinque A,D,E,B,C puncta: & totidem in ſectione $\alpha\beta\gamma$ notata $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$. Sit autem figura $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ punctis terminata ſimilis figuræ pũctis A,D,E,B,C terminatæ. Dico coni ſectionem $\alpha\beta\gamma$, coni ſectioni ABC, eſſe ſimilem.

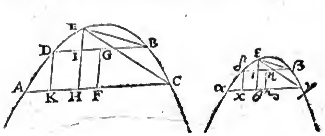


Iungantur AC, DB: & primùm inuicem æquidiſtent. Similiter, igitur iunctæ $\alpha\gamma$, $\delta\beta$, inuicem æquidiſtabunt. Sectis itaque AC,DB itemque $\alpha\gamma$,$\delta\beta$ bifariam, illis in F & G, his in ζ & η, iunctæ FG, $\zeta\eta$ ſectionum erunt diametri.Eiſdem æquidiſtantes à punctis E & ϵ ducantur rectæ EH, $\epsilon\theta$, (niſi ſi ijſdem E & ϵ punctis occurrant productæ FG, $\zeta\eta$ diametri.) Occurratque EH rectæ AC in H, rectam DB ſecans in I. Similiter & recta $\epsilon\theta$ rectæ $\alpha\gamma$ occurrat in θ, ſecans $\delta\beta$ in ι. Ducatur autem DK æquidiſtans EH, iunganturque AD, EC, EB.Similiter & ducta $\delta\kappa$ æquidiſtante $\epsilon\theta$, iungantur $\alpha\delta$, $\epsilon\gamma$, $\epsilon\beta$.

Sitq; primùm, vt EH ad EI, ita rectangulum AHC ad rectan-

gulum D I B. Erit igitur, ex coroll. ad 28. hujus, ABC ſectio parabola. Oſtendendum eſt igitur, & $\alpha\beta\gamma$ ſectionem parabolam eſſe: & idcirco ſectioni A B C eſſe ſimilem.

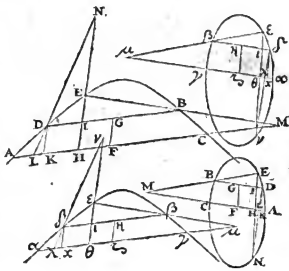
Quoniam igitur, propter ſimilitudinem, vt A C ad A D, ita eſt $\alpha\gamma$ ad $\alpha\delta$; & vt A D ad D B, ita eſt $\alpha\delta$ ad $\delta\beta$; ex æquali, vt A C ad D B, ita erit $\alpha\gamma$ ad $\delta\beta$: & ſumptis dimidijs, vt A F ad D G, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\delta\eta$: & diuidendo, ac per conuerſionem rationis, vt AF ad AK, ita erit $\alpha\zeta$ ad $\alpha\kappa$. Sed vt A F ad A D, ita eſt $\alpha\zeta$ ad $\alpha\delta$. Igitur, ex æquali, vt A K ad A D, ita erit $\alpha\kappa$ ad $\alpha\delta$. Suntque ad A & α anguli æquales: triangulum igitur $\delta\alpha\kappa$ triangulo DAK erit ſimile. Ideoque & angulus $\alpha\kappa\delta$ angulo AKD æqualis erit, & angulus $\varepsilon\theta\gamma$ angulo EHC. Sed & æqualis etiam $\varepsilon\gamma\theta$ angulus angulo ECH. Triangulum igitur $\varepsilon\gamma\theta$, triangulo ECH etiam ſimile erit. Quare vt EC ad CH, ita erit $\varepsilon\gamma$ ad $\gamma\theta$ Sed vt A C ad CE, ita, propter ſimilitudinem figurarum, eſt $\alpha\gamma$ ad $\gamma\varepsilon$. Igitur, ex æquali, vt AC ad CH, ita erit $\alpha\gamma$ ad $\gamma\theta$: & diuidendo vt AH ad HC, hoc eſt vt AHC rectangulum ad HC quadratum, ita erit $\alpha\theta$ ad $\theta\gamma$, hoc eſt, ita $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\theta\gamma$ quadratum. Sed, quoniam vt EB ad BI, ita, propter ſimilitudinem triangulorum EBI, $\varepsilon\beta\iota$, eſt $\varepsilon\beta$, ad $\beta\iota$; & vt D B ad B E, ita eſt, propter ſimilitudinem figurarum, $\delta\beta$ ad $\beta\varepsilon$: ex æquali, vt DB ad BI, ita erit $\delta\beta$ ad $\beta\iota$: & diuidendo, vt DI ad IB, hoc eſt vt DIB rectangulum ad IB quadratum, ita erit $\delta\iota$ ad $\iota\beta$, hoc eſt $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\iota\beta$ quadratum.



Quoniam autem vt AC ad DB, ita eſt $\alpha\gamma$ ad $\delta\beta$: vtque AC ad CH, ita eſt $\alpha\gamma$ ad $\gamma\theta$; ex æquali, vt DB ad CH, ita erit $\delta\beta$ ad $\gamma\theta$. Sed vt DB ad BI, ita eſt $\delta\beta$ ad $\beta\iota$. Igitur, ex æquali rurſus, vt CH ad BI, ita erit $\gamma\theta$ ad $\beta\iota$; & vt CH quadratum ad BI quadratum, ita erit $\theta\gamma$ quadratum ad $\beta\iota$ quadratum. Sed iam vt AHC rectangulum ad HC quadratum, ita eſt $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\theta\gamma$ quadratum: & vt DIB rectangulum ad IB quadratum, ita eſt $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\beta\iota$ quadratum; igitur vt AHC rectangulum ad DIB rectangulum, ita erit $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\delta\iota\beta$ rectangulum. Vt autem CH ad BI, ita eſt $\gamma\theta$ ad $\beta\iota$, & vt CH ad HE, ita eſt $\gamma\theta$ ad $\theta\varepsilon$. Igitur, ex æquali, vt HE ad BI, ita erit $\theta\varepsilon$ ad $\beta\iota$. Sed vt BI ad IE, ita eſt $\beta\iota$ ad $\iota\varepsilon$. Igitur, ex æquali rurſus, vt HE ad IE, ita erit $\theta\varepsilon$ ad $\iota\varepsilon$. Sed vt HE ad IE, ita eſt rectangulum AHC ad rectangulum DIB, hoc eſt ita rectangulum $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$. Igitur vt $\theta\varepsilon$ ad $\iota\varepsilon$, ita etiam erit $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\delta\iota\beta$ rectangulum. Quare, ex coroll. ad 28. huius, erit $\alpha\beta\gamma$ ſectio etiam parabola. Ideoque ex 11

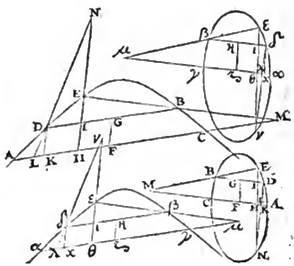
huius, ſectioni ſiue parabolæ ABC ſimilis. Quod 1° erat demonſtrandum.

Sit autem iam maior minorue EH ad EI ratio, quàm rectanguli AHC ad rectangulum DIB. Ideoque ſit, ex antecedente coroll. 3. ſectio ABC hyperbola, vel ellipſis, aut etiam circuli circumferentia. Oſtendendum eſt ſectionem $\alpha\beta\gamma$ etiam hyperbolam eſſe, aut ellipſim, hyperbolæ, aut ellipſi ABC ſimilem. Vel etiam circuli circumferentiam eſſe.



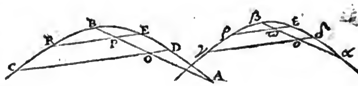
Sint eadem quæ in primis figuris. Et ſi quidem IB non minor eſt quàm DI: iungatur EB, & producatur donec productæ AC occurrat in M. Rectanguloque AHC æquale ponatur rectangulum MHL. Erit igitur HL maior vel minor quàm DI, hoc eſt HK. (nam ſi æqualis foret, eadem etiam foret MHK, hoc eſt AHC rectanguli ad BID rectangulum ratio, quæ EH ad EI, eſſetque ABC ſectio parabola, quod non ponitur.) Iuncta igitur LD, & producta, prout opus, productæ HE occurret. Sit occurſus in N. Quoniam autem, ex iam oſtenſis, vt HE ad IE, ita eſt $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$, & vt rectangulum AHC ad rectangulum DIB, ita eſt rectangulum $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$. maiorque eſt vel minor HE ad IE ratio, quàm rectanguli AHC ad rectangulum DIB; igitur & maior erit vel minor $\theta\epsilon$ ad $\iota\epsilon$ ratio, quàm rectanguli $\alpha\theta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\beta$. Ideoque & ſectio $\alpha\beta\gamma$ etiam erit vel hyperbola, vel ellipſis, aut etiam circuli circumferentia. Igitur & producta $\gamma\iota\beta$ donec productæ $\alpha\gamma$ occurrat in μ, factoque rectangulo $\mu\theta\lambda$ æquali rectangulo $\alpha\theta\gamma$, erit $\theta\lambda$ maior minorue quàm $\theta\kappa$, ſiue $\delta\iota$. Et idcirco iuncta $\lambda\delta$ & producta productæ $\theta\epsilon$ occurret. Sit etiam occurſus in V. Erunt igitur triangula $\epsilon\theta\mu$, $\epsilon\iota\beta$ ſingula ſingulis EHM, EIB triangulis ſimilia, atque etiam triangula $\nu\theta\lambda$, $\nu\iota\delta$, triangulis NHL, NID. Quare vt NH ad HL, ita erit $\nu\theta$ ad $\theta\lambda$: & vt EH ad HM, ita erit $\epsilon\theta$ ad $\theta\mu$: &, rationum compoſitione, vt MHL, ſiue AHC rectangulum ad NHE rectangulum, ita erit $\mu\theta\lambda$ ſiue $\alpha\theta\gamma$ rectangulum ad $\nu\theta\epsilon$ rectangulum. Et, eadem ratione, vt DIB rectangulum ad NIE rectangulum, ita erit $\delta\iota\beta$ rectangulum ad $\nu\iota\epsilon$ rectangulum. Sed vt NH ad HL, ita eſt NI ad ID: vtque EH ad HM, ita eſt EI ad IB: ideoque vt rectangulum MHL, ſiue AHC, ad rectangulum NHE, ita eſt rectangulum DIB ad rectan-

gulum NIE: eademque ratione vt rectangulum $\mu\theta\lambda$, ſiue $\alpha\theta\gamma$, ad rectangulum $\nu\theta\epsilon$, ita eſt rectangulum $\delta\iota\beta$ ad rectangulum $\nu\iota\epsilon$. Igitur vtrobique erit, ex coroll. 1. anteced. tam punctum ν in eadem ſectione $\alpha\beta\gamma$, ſaltem oppoſita, quàm punctum N in eadem ſectione ABC, ſaltem oppoſita. Sed vt NHE rectangulum ad AHC rectangulum, ita eſt, ex 2. coroll. anteced. tranſuerſa ſectionis ABC diameter rectæ N H æquidiſtans ad contiguam parametrum; & vt $\nu\theta\epsilon$ rectangulum ad $\alpha\theta\gamma$ rectangulum, ita etiam eſt, ex eodem corollario 2. anteced. tranſuerſa ſectionis $\alpha\beta\gamma$ diameter æquidiſtans rectæ $\nu\theta$, ad contiguam parametrum. Igitur vt tranſuerſa ſectionis A B C diameter ad contiguam parametrum,



ita ſectionis $\alpha\beta\gamma$ tranſuerſa diameter ad ſuam contiguam parametrum. Et ſunt anguli A H N $\alpha\theta\gamma$, vtrobique ſcilicet ab ordinatim applicatis facti, inuicem æquales. Quare, ex 4 huius, erit altera alteri ſectio, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, aut etiam circuli circumferentia, ſimilis. Quod 2° erat demonſtrandum.

At ſi datorum quinque A,D,E,B,C, aut quinque $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ punctorum neutra binis æquidiſtantibus rectis lineis iungantur; Iunctis AB, DC inuicem in O puncto ſe ſecantibus, ducatur E R æquidiſtans D C, quę rectam A B ſecet in P, & ſectioni occurrat in R. Similiter & iunctis $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ ſe inuicem in o ſecantibus, ducatur $\epsilon\rho$ æquidiſtans $\delta\gamma$ ſectioni occurrens in ρ, & rectam $\alpha\beta$ ſecans in π.



Quoniam igitur puncta $\alpha,\delta,\epsilon,\beta,\gamma$ ſimiliter ſunt poſita punctis A,D,E,B,C; erunt & rectæ $\alpha\beta$, $\delta\gamma$ ſimiliter poſitæ rectis AB, DC. Quare vt AO ad OD, & BO ad OC, hoc eſt vt rectāgulum AOB ad rectāgulum DOC, ita erit αo ad $o\delta$, & ita βo ad $o\gamma$, hoc eſt ita rectangulum $\alpha o\beta$ ad rectangulum $\delta o\gamma$. Sed, ex 27 huius, vt AOB rectangulum ad D O C rectangulum, ita eſt APB rectangulum ad EPR rectangulum: & vt $\alpha o\beta$ rectangulum ad $\delta o\gamma$ rectangulum, ita eſt $\alpha\pi\beta$ rectangulum ad rectangulum $\epsilon\pi\rho$. Quare vt A P B rectangulum ad rectangulum EPR,

Digitized by Google

[illegible] ABDEBC ſe- [illegible] rectis [illegible] ſimiliter datis, [illegible] concluditur [illegible] ABC, ſiue hyperbola, ſiue ellipſi, aut [illegible] Quare omnimodè con- [illegible] Quod erat demonſtrandum.

COROL. [illegible]

Ex proximæ demonſtratione vtique ſatis patet pro varia quinti cuiuſlibet puncti ad quatuor reliqua poſitione propoſitarum binarum ſectionum vtramque primùm nomine diſtingui, deinde & ſpecie innoteſcere, ideoque, & tum ad ſpecialem ipſarum, tum ad abſolutam ſectionum determinationem, quinque ad minimum punctorum notam poſitionem eſſe neceſſariam. Alioqui per eadem quatuor puncta, quamquam binæ tantùm deſcribi veniant parabolæ, innumeræ tamen ſpecie differentes, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſes haberi poſſunt, ideoque & deſcribi.

PROBL. I. PROP. XXXIV.

Datis in plano quinque punctis, quæ totidem notatis in plano aliquo vmbræ diurnæ terminis ſint ſimiliter poſita, per eadem [illegible] coni ſectionem deſcribere, quæ [illegible] repræſentet: ideoque & lineatæ ſuper eodem plano ab vmbræ acumine coni ſectioni ſimilis ſit.



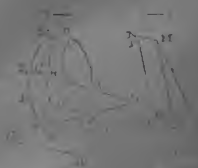
Conſtat autem quinque puncta, ſi non omnia in recta ſint linea, [illegible] [illegible] poſita, vt, cum bina [illegible] recta iungentur linea, neutrum reliquorum [illegible] includant, aut in directum habeant.

Sint [illegible] quinque A, B, C, D, E [illegible] & primum ipſorum quatuor [illegible] A, E, B, D, ſint binarum parallelarum termini: iunctæq; AE, BD

biſariàm ſecentur, illa in F, hæc in G. Iuncta igitur F G [illegible] erit ſectionis per A,B,C,D,E puncta deſcribendæ [illegible] à reliquo C puncto ducatur C H occurrens A E in H, [illegible] B D in I. Si quidem igitur vt AHE rectangulum ad [illegible] BID, ita eſt CH ad CI, erit, ex coroll. ad 28 hujus, [illegible] A,B,C,D,E puncta coni ſectio parabola. Quare ſi vt [illegible] quadratorum F E, G D ad quadratum G D, ita fiat I G ad G [illegible] erit punctum K vertex deſcribendæ paraboles, & ipſa K F diameter ad quam ordinatim erunt applicatæ AE, B D rectæ, è quibus datis, ex ſupra oſtenſis, facilè parabola deſcribetur. Sed & eadem ratione concludetur quinque notatos vmbræ diurnæ terminos etiam in parabola eſſe. Quare exhibita AKE ſectio, ſiue parabola, formatæ ab vmbræ acumine ſectioni ſimilis [illegible] que & hoc primo caſu problemati erit ſatisfactum.



Non ſit autem, reliquis iiſdem poſitis, eadem rectanguli A[illegible] ad rectangulum B I D ratio, quæ rectæ C H ad rectam C I, ſed [illegible] maior vel minor. Erunt igitur, ex coroll. 3 ad 32 hujus, [illegible] A,B,C,D,E in hyperbola, vel in ellipſi, aut etiam in circuli [illegible] cumferentia. Iuncta igitur CB,& producta (ſi quidem B I non ſit minor quàm D I, aliàs enim iungenda eſſet CD) occurrat productæ LA in K: rectanguloque A H E æquale ponatur KHL rectangulum: & iuncta L D producatur donec productæ, prout opus, H C occurrat in M, (Occurret autem, quoniam maior minorue eſt H I [illegible] antecedente oſtenſum eſt.) Productæque I G prout [illegible] O & N rectæ C O, MN æquidiſtantes A E. [illegible] gulum ad M I C rectangulum, ita fiat quadratum C O [illegible] tum ex X: atque ad NO rectam comparetur ex [illegible] gulum vel parallelogrammum æquale quadrato [illegible] hyperbola quidem deficiat, pro ellipſi autem, [illegible] circumferentia, excedat quadrato vel parallelogrammo [illegible] æquiangulo, & ſint defectus aut exceſſus [illegible] è datis P R tranſuerſa diametro, & C O [illegible] tione tranſuerſæ PR diametri ad [illegible] metrum eadem quæ X quadrati, hoc eſt [illegible] quadratum, deſcribatur ex ſupra oſtenſis, [illegible]



vel etiam circuli circumferentia. Dico deſcriptam eiuſmodi ſectionem, cuius ſit PL tranſuerſa diameter, punctum C in ſectione, atq; CO ordinatim applicatam, per quatuor reliqua A,B,D,E puncta etiam tranſire, & problemati ſatisfacere. Quoniam enim vt MH ad HE, ita eſt MI ad ID, & vt CH ad HK, ita eſt CI ad IB, erit compoſitæ rectanguli MHC ad rectangulum MIC ratio eadem compoſitæ AHE, hoc eſt AHE rectanguli ad rectangulum BID rationi. Quare permutando, vt MIC rectangulum ad BID rectangulum, ita erit MHC rectangulum ad AHE rectangulum. Sed vt MIC, hoc eſt NGO, rectangulum ad BID rectangulum, ita eſt quadratum ex X, hoc eſt POR rectangulum, ad OC, hoc eſt GI, quadratum: atque etiam ita compoſitum PGR rectangulum ad compoſitum GD quadratum. Eademq; ratione vt reliquum MHC, ſiue PFO, rectangulum ad reliquum AHE rectangulum, ita eſſe oſtendetur totum PFR rectangulum ad totum FE quadratum. Igitur & in ſectione cuius ſit PL tranſuerſa diameter, atq; ad ipſam productam, vbi opus, ordinatim applicata CO, etiam & rectæ FE, DG erunt a ſectione ad eandem PL ordinatim applicatæ. Ideoque & puncta A,B,L,C,D,E, in eadem erunt ſectione cuius ſit PL tranſuerſa diameter ad contiguam in angulo LOC parametrum ſe habens velut POL rectangulum ad OC quadratum. Et ſi quidem maior eſt ratio rectanguli AHE ad rectangulum BID ratio, quam rectæ CH ad rectam CI, erit quæſita ſectio hyperbola. At ſi contra: ellipſis, vel circuli circumferentia. Exiſtentibus autem angulo MID recto, & æqualibus BID, MIC rectangulis; tunc erit per puncta A, B, C, D, E quæſita ſectio circuli circumferentia. Sin autem ellipſis. Sed & eodem modo demonſtrabitur notatos quinque ſimiliter poſitos eiuſdem diei vmbrarum terminos in eadem hyperbola, vel ellipſi, aut etiam circuli circumferentia conſiſtere. Quare ex ſimiliter vtrobique poſitis quinis in ſectione punctis, erit deſcripta per A,B,C,D,E puncta ſectio formatæ ab acumine vmbræ ſectioni, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſi, vel etiam circuli circumferentiæ, ex antecedente, ſimilis. Et ideo hoc etiam caſu problemati ſatisfactum.

At vero ſi propoſitorum quinque A,B,C,D,E punctorum neutra bina æquidiſtantibus rectis iungantur vt in poſtremis figuris; iunctæ AD, BE inuicem ſeſe ſecent in puncto F: ductaque ad AD recta CG æquidiſtans BE producatur in H, vt rectangulum CGH ſit ad rectangulum AGD, velut rectangulum BFE ad rectangulum AFD. Erunt igitur, ex coroll. ad 27 huius ſex A, B, C, D, H, E puncta in eadem coni ſectione. Quare rurſus



e datis quinque B, C, D, H, E punctis, quorum [illegible] diſtantibus rectis iunguntur, conueniente [illegible] examinabitur, & eiuſdem [illegible] &, vt in poſteriori anteced. prop. [illegible] quinque vmbrarum terminis ſimiliter poſitis ipſis A, B, C, D, E pun-



ctis datis, eadem ratione & ſextus aſſignabitur terminus ſimiliter ſe habens ad reliquos quinque, veluti & hic punctum H ad quinque reliqua. Igitur, & eodem modo notati vmbrarum termini in eadem eſſe, vel parabola, vel hyperbola, vel ellipſi, aut etiam circuli circumferentia probabuntur. [illegible] ſimiliter poſitis vtrobique in ſectione quinis punctis [illegible] B, C, D, H, E puncta ſectio ſectioni ab vmbræ penicillo delineatæ, ſiue parabolæ, ſiue hyperbolæ, aut ellipſi, vel etiam circuli circumferentiæ ſimilis oſtendetur. Ideoque & omnimodè problemati ſatisfactum erit. Quod facere oportebat.

MONITVM

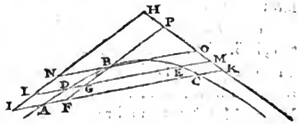
Priuſquam etiam ex huiuſce agri luſtratione pedem efferimus, neque iniucundum, neque inutile duximus [illegible] noſtris [illegible] Archimedis Conoïdea & Sphæroidea Paralipomenis, ſiue manu ſupplementis, mutuatum inſigne hoc vnicum ſequens [illegible] huc congerere pro ſingulari binarum hyperbolarum ſimilium examine, & ad inuicem comparatione. Erit autem huiuſmodi.

THEOR. XXX PROP. XXXV.

Si in hyperbola recta quæpiam ducatur alterutri Aſymptoto æquidiſtans, binaſque rectas quaſcunque æquidiſtantes in ſectione ductas diuidens, erunt rectangula ſub æquidiſtantium partibus vtrinque ſectione terminatis inuicem, veluti rectæ Aſymptoto æquidiſtantis partes a ſectione ſumptæ inuicem.

Sit hyperbola A B C, & in ipſa binæ quælibet [illegible] æquidiſtantes A C, D E. Sint autem eiuſdem Aſymptoti [illegible]

& ducta BF æquidiſtans HI rectas AC, DE diuidat, illam in F, hanc in G. Dico vt BF ad BG, ita eſſe rectangulum AFC ad rectāgulum DGE.

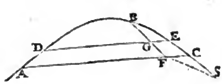


Productæ AC, DE ex vtraq; parte Aſymptotis occurrant, illa in I & K, hæc in L & M: eiſdemque occurrat in N & O recta NBO ducta per B rectis AC, DE æquidiſtans: & producta FB Aſymptoto HK occurrat in P. Igitur vt PB ad PF, ita erit BO ad FK: & ita rectangulum NBO, hoc eſt, ex 39 1. hujus, rectangulum IAK ad rectangulum IFK: & diuidendo vt PB ad BF, ita erit NBO, ſiue IAK rectangulum ad AFC rectangulum. Similiter vt PB ad PG, ita erit BO ad GM, & ita NBO, ſiue LDM, rectangulum ad rectangulum LGM: atque etiam diuidendo vt PB ad BG, ita erit LDM rectangulum ad rectangulum DGE. Quare ex æquali vt BF ad BG, ita erit AFC rectangulum ad rectangulum DGE. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XXXI. PROP. XXXVI.

Si in hyperbola recta quæpiam ducatur binas rectas æquidiſtantes in ſectione ductas ita diuidens, vt eadem ſit rectangulorum ſub æquidiſtantium partibus vtrinque ſectione terminatis ad iuuicem ratio, quæ reſpondentium ductæ rectæ partium à ſectione ſumptarum ad inuicem; erit recta eiuſmodi ducta alterutri ſectionis Aſymptoto æquidiſtans.

Sit hyperbola ABC, & in ipſa binæ æquidiſtantes ductæ rectæ AC, DE: A puncto autem B, ducta recta BF diuidens AC in F, & DE in G, faciat rectangulum AFC ad rectangulum DGE veluti BF ad BG. Dico rectam BF alterutri ſectionis Aſymptoto eſſe æquidiſtantem.



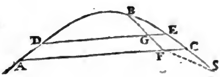
Si enim non eſt æquidiſtans, aut cum ſectione ſemel tantùm in eodem B puncto conueniet vt diameter, vel diametro cuipiam æquidiſtans, aut producta cum ſectione rurſus in alio præter B puncto conueniet.

Si quidem igitur BF diameter eſt, aut diametro æquidiſtans; minor

Digitized by Google

erit ratio BF ad BG, quàm rectanguli AFC ad rectangulum DGE. hoc enim in 34 hujus, & ad eam 3 coroll. jam oſtenſum eſt. Sed ponitur eadem. Igitur & eadem erit, & minor. Quod eſt abſurdum.

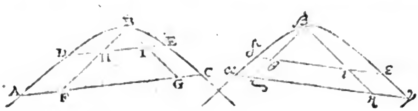
Si verò BF producta ſectioni occurrat; ſit occurſus, ſi fieri poteſt, in S. Igitur ex demonſtratis in 27 huius, vt rectangulum AFC ad rectangulum DGE, ita erit rectangulum BFS ad rectangulum BGS. Maior autem eſt rectanguli BFS ad rectangulum BGS ratio quàm BF ad BG: quoniam & FS maior eſt quàm GS. Igitur & maior erit rectanguli AFC ad rectangulum DGE ratio quàm rectæ BF ad rectam BG, quod rurſus eſt abſurdum: ponitur enim eadem. Quoniam igitur BF neque diameter eſt, aut diametro æquidiſtans, neque in ſectione ducta, aut cuipiam ſectionem contingenti æquidiſtans, neceſſe eſt, ex demonſtratis in 29 & 41 primi huius, vt Aſymptoto alterutri ſit æquidiſtans. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. XXXII. PROP. XXXVII.

Si ſint binæ hyperbolæ, & à ſumpto quolibet in vtraque ſectione puncto binæ rectæ ducantur quæ binas quaſcunque rectas æquidiſtantes in ſectione ductas ita diuidant, vt eadem ſit vtrobique binorum quorumlibet rectangulorum ſub æquidiſtantium ſegmentis ad eaſdem partes factis ad inuicem ratio, quæ interſegmentorum ad inuicem: atque etiam angulus abs ductis vnius contentus æqualis angulo alterius ductis contento; erit altera alteri hyperbola ſimilis.

Sint binæ hyperbolæ ABC, $\alpha\beta\gamma$, & in ipſarum vtraque binæ



æquidiſtantes quæcunque ductæ AC, DE, & $\alpha\gamma$, $\delta\epsilon$: à ſumpto autem quolibet in ſectione ABC puncto B ductis binis BF, BG rectis, quæ rectam AC ſecent in F & G, & rectam DE in H & I, ſit vt FG ad HI, ita rectangulum AFC ad rectangulum DHE

atque ita rectangulum AGC ad rectangulum DIE: ſimiliter à ſumpto quocunque in ſectione $\alpha\beta\gamma$ puncto β ductis binis $\beta\zeta$, $\beta\eta$ rectis ſecantibus $\alpha\gamma$ quidem in ζ & η, & $\delta\epsilon$ in θ & ι, ſit vt $\zeta\eta$ ad $\theta\iota$, ita rectangulum $\alpha\zeta\gamma$ ad rectangulum $\delta\theta\epsilon$: atque etiam ita rectangulum $\alpha\eta\gamma$ ad rectangulum $\delta\iota\epsilon$. Sitque angulus $\zeta\beta\eta$ æqualis angulo FBG. Dico hyperbolam $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC eſſe ſimilem.

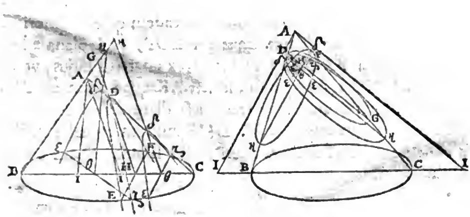
Quoniam enim in ſectione ABC, vt FG ad HI, hoc eſt vt BF ad BH, ſiue vt BG ad BI, ita eſt rectangulum AFC ad rectangulum DHE: atque etiam ita rectangulum AGC ad rectangulum DIE; erit, ex antecedente, vtraque BF, BG Aſymptoto æquidiſtans: angulusque FBG æqualis angulo ab Aſymptotis contento. Similiter & vtraque $\beta\zeta$, $\beta\eta$ oſtendetur Aſymptoto æquidiſtans: ideoque & angulus $\zeta\beta\eta$ æqualis angulo ab Aſymptotis hyperbolæ $\alpha\beta\gamma$ contento. Eſt autem $\zeta\beta\eta$ angulus angulo FBG æqualis. Quare, per 20 huius, erit hyperbola $\alpha\beta\gamma$ hyperbolæ ABC ſimilis. Quod erat demouſtrandum.

THEOR. XXIII. PROP. XXXVIII.

Si conus binis æquidiſtantibus, aut inuicem ſubcontrariè poſitis planis ſecetur non per verticem; erit factarum in ſuperficie coni ſectionum altera alteri ſimilis.

Hoc autem iam patet in binis parabolis, & in binis circulorum circumferentijs.

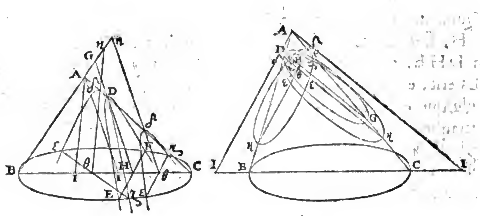
Sit igitur conus ABC, qui duobus planis, vt proponuntur, non per A verticem ſecetur, & ſint factæ in ſuperficie binæ EDF, $\epsilon\delta\zeta$ ſe-



ctiones hyperbolæ, ſiue ellipſes. Dico hyperbolam $\epsilon\delta\zeta$ hyperbolæ, ſiue ellipſi, EDF eſſe ſimilem.

Si quidem plana per EDF $\epsilon\delta\zeta$ primùm ſunt æquidiſtantia, erunt

& communes ipſorum cum baſe coni ſectiones etiam æquidiſtantes. Sint ipſæ EF, εζ: ſeceturque rurſus ABC conus, aut ſectus intelligatur, plano per axem ad rectos baſi angulos quod communem in baſe ſectionem faciat rectam BC ad ipſas EF, εζ, perpendicularem. Sint autem & communes planorum EDF, εδζ, & trianguli per axem



ſectiones rectæ GDH, ηδθ, quæ & inuicem erunt parallelæ. Ipſis à coni vertice A æquidiſtans ducatur AI. Quoniam igitur vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt GD tranſuerſa diameter ſectionis EDF ad contiguam parametrum, & ita ηδ tranſuerſa ſectionis εδζ diameter ad ſuam contiguam parametrum. Suntque vtrobiq; anguli ab ordinatim ad diametrum ductis facti ipſis DHE, δθε angulis rectis, ideoque & inuicem æqualibus, æquales, etenim & ipſæ EHF, εθζ ſunt ordinatim ad ipſas DH, δθ diametros applicatæ. Igitur, per 4 hujus, erit hyperbola, vel ellipſis, εδζ hyperbolæ, vel ellipſi, EDF ſimilis. Quod 1° erat demonſtrandum.

At ſi plana proponantur inuicem ſubcontrariè poſita; erit & δθ diameter ſubcontrariè poſita diametro DH, conſtituetque triangulum ηαδ triangulo GAD ſimile, & ſubcontrariè poſitum. Ducatur igitur AI æquidiſtans δθ, & reliqua fiant eadem quæ in priori caſu. Quoniam igitur ex definit. binæ per EDF, εδζ plana ad triangulum per axem BAC ſunt recta: &, ex 11ª tertij hujus, vt AI quadratum ad BIC rectangulum, ita eſt AK quadratum ad BKC rectangulum: & ita vtrobique tranſuerſa diameter ad contiguam parametrum: ſuntque anguli δθζ, DHF inuicem æquales, ſcilicet recti; concludetur rurſus altera alteri ſectio ſimilis. Quod 2° erat demonſtrandum.

ALITER.

Sed & quoniam in proximè antecedente libro ſubcontrariæ ſectiones plurimæ exhibitæ ſunt eædem inuicem, variæque ibidem methodi traditæ pro iiſdem exhibendis. Si propoſitarum binarum in hoc

Digitized by Google

hoc theoremate ſubcontrariarum inuicem ſectionum alterutri eadem exhibeatur in eodem cono ſubcontraria ſectio, erit illa haud dubiè alteri ſubcontrariè poſitæ æquidiſtans, ideoque & ſimilis. Quare & ſubcontrariè inuicem poſitæ ſectiones, inuicem etiam, ex ſupra oſtenſis, ſimiles erunt.

COROLL.

Hinc liquidò conſtat binarum à duobus æquidiſtantibus planis, aut inuicem ſubcontrariè poſitis in eiuſdem coni ſuperficie factarum ſectionum, ideoque inuicem ſimilium, ſimiles etiam in communi per axem triangulo diametros eſſe.

MONITVM.

Hinc etiam ſatìs ſit euidens, quàm parum æquus rerum conicarum æſtimator fuerit David Riualtus à Flurantia Archimedis operum infœlix Scholiaſtes, qui multa ad eiuſdem Conoïdea præſertim & Sphæroïdea commentus eſt à veritate prorſus aliena. Quale eſt illud à nobis ſupra notatum ipſius de ſimilium coni-ſectionum definitionibus examen. Atque etiam iſtud de binis ſimilibus in eodem cono hyperbolis pronunciatum, quod cum binas æquidiſtantes, ſiue à duobus planis æquidiſtantibus in eiuſdem coni ſuperficie formatas, atq; ideo parallelas habentes in eodem cono diametros, inuicem ſimiles expoſuiſſet & demonſtraſſet; etiam & conuerſum aggreſſus oſtendere, ipſum vt demonſtratum auſus eſt publicare, & ſuis ibidem commentariis mandare: ſcilicet, Et omnes ſimiles hyperbolas in eiuſdem coni ſuperficie formatas, inuicem æquidiſtantes eſſe, & in eodem cono parallelas habere diametros. *Ipſum ſiquidem latuit binarum, ſiue earumdem inuicem, ſiue ſimilium hyperbolarum ſubcontraria in eiuſdem coni ſuperficie poſitio. Vereor ne & ipſi non ſatìs cognita fuerit binarum ellipſium ſubcontrariarum ſcientia: Cæterùm quandoquidem nihil tam ſimile ſubjecto cuilibet dici aut videri poſſit, quàm quod idem eſſe cum ipſomet ſubiecto poſſumus euincere; Idcirco pleraq; quæ inſti-*

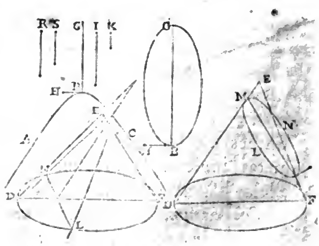
Digitized by Google

tuti de ſimilibus inuicem coni-ſectionibus examinis propria videri potuerant praeoccupauit ſibi vindicare abſoluta iam ſuperiori libro de earumdem inuicem coni-ſectionum comparatione, atque etiam de ipſarum, ſiue in plano, ſiue in coni ſuperficie, expoſitione tractatio. Quod hìc ſaltem vt notari debuit, ita tantùm monuiſſe ſufficiens videri poſſit. Equidem quotquot ferè examinis ſiue deſcriptionis methodos proximè antecedente libro proſecuti ſumus, eaſdem & præſenti tractationi accommodare vnicuique ſatìs liberum erit, & perfacile. Quod vno & altero exemplo neq; inutile neq; ingratum fortè fuerit experiri.

Prob. II. Prop. XXXIX.

Dato cono; in eiuſdem ſuperficie datæ hyperbolæ, aut ellipſi, ſimilem in data diametrorum ratione hyperbolam, aut ellipſim, exhibere.

Oportet autem vt conus propoſitus ſit eiuſmodi, ſaltem pro hyperbola exhibenda, vt, cum ſecabitur plano ad baſim recto, non minor ſit quadrati biſecantis angulum trianguli per axem ad rectangulum ſub eiuſdem baſis partibus ab eadem biſecante factis ratio, quàm tranſuerſi propoſitæ hyperbolæ axis ad rectam parametrum.



Sit igitur data hyperbola, ellipſiſue, A B C: dataq; ratio R ad S. Datus autem ſit conus E D F, in cuius ſuperficie exhibenda ſit hyperbola aut ellipſis datæ A B C hyperbolæ aut ellipſi ſimilis, ita vt exhibitæ in coni E D F ſuperficie ſectionis diameter ſe ad diametrum propoſitæ ſectionis A B C habeat veluti R ad S.

Exponantur ſectionis A B C tranſuerſus axis B G, & recta parameter B H: vtq; R ad S, ita fiat B G ad rectam I, & B H ad rectam K. Deinde ſectioni, ſiue hyperbolæ ſiue ellipſi, cuius ſit

Digitized by Google

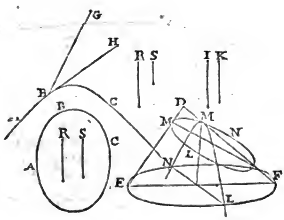
tranſuerſus axis I, & recta parameter K, in propoſiti E D F coni ſuperficie eadem exhibeatur ſectio per 40. aut 41. tertij hujus, & ſit illa L M N. Dico ſectionem L M N problemati ſatisfacere.

Quoniam enim ſectionis L M N tranſuerſus axis eſt æqualis I, & recta parameter æqualis rectæ parametro K: eſtq; I ad BG, veluti K ad BH: & permutatim vt B G ad BH, ita eſt I ad K, vtrobique ſcilicet eadem tranſuerſi axis ad rectam parametrum ratio; erit, ex 4 hujus, exhibita in dati E D F coni ſuperficie ſectio LMN, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis propoſitæ ABC hyperbolæ, ſiue ellipſi, ſimilis in data R ad S diametrorum ratione. Quod facere oportebat.

PROB. III. PROP. XL.

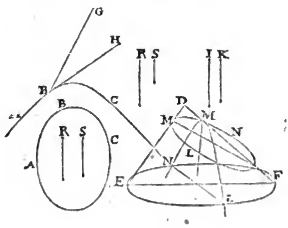
Data hyperbola aut ellipſi; conum exhibere, & in eiuſdem ſuperficie ſectionem eidem datæ hyperbolæ aut ellipſi ſimilem in data diametrorum ratione.

Sit data hyperbola, ellipſiſue, A B C: & data ratio R ad S. Oporteatque conum exhibere in cujus ſuperficie ſit ſectio datæ A B C ſectioni ſimilis, cuius diameter ad ſectionis A B C diametrum ſe habeat vt R ad S.



Exhibeatur ſectionis A B C diameter quæcunque tranſuerſa BG, eidemq; contigua parameter B H: vtque R ad S, ita fiat B G ad I, & BH ad K: Atque è datis I & K rectis terminatis in dato GBH angulo inuicem iunctis exhibeatur per 48 vel 50 tertij hujus conus E D F, & in ejus ſuperficie ſectio LMN, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, cujus ſit tranſuerſa diameter recta I, & contigua parameter recta K, vertexq; ipſarum connexionis punctum, in qua ad eandem tranſuerſam diametrum, vbi opus productam, ordinatim à ſectione ductæ in dato GBH angulo applicentur. Dico conum EDF, & in eius ſuperficie exhibitam ſectionem LMN, problemati ſatisfacere.

Quoniam enim exhibitæ LMN ſectionis tranſuerſa diameter eſt I, & contigua parameter K: Eſtq; I ad BG, veluti K ad BH: & permutatim vt BG ad BH, ita eſt I ad K: vtrobiq; ſcilicet eadem tranſuerſæ diametri ad contiguam parametrum ratio: atque etiam angulus ab ordinatim ad I diametrum ductis factus æqualis angulo GBH, qui ab ordinatim ad GB diametrum applicatis continetur. Erit, ex 4. hujus, in exhibiti EDF coni ſuperficie ſectio LMN, ſiue hyperbola, ſiue ellipſis, propoſitæ ABC ſectioni, ſiue hyperbolæ, ſiue ellipſi, in data R ad S diametrorum ratione ſimilis. Quod facere oportebat.



QVARTI LIBRI FINIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

IV-4.

Digitized by Google